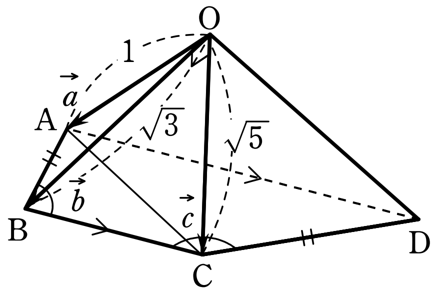
数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ であるから

$$\angle\mathrm{AOC}={}^{\text{アイ}}90^\circ$$

よって，$\triangle\mathrm{OAC}$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{{}^{\text{ウ}}5}}{{}^{\text{エ}}2}$$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$$=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$$

$$=-1-3+(\sqrt{3})^2={}^{\text{オカ}}-1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

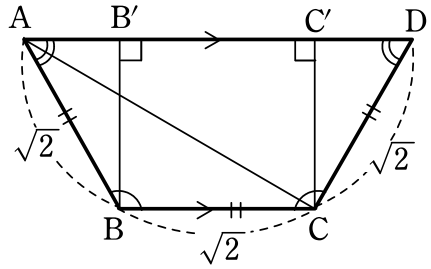
$$=1^2-2\cdot1+(\sqrt{3})^2=2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=\sqrt{{}^{\text{キ}}2}$

また　　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$$=(\sqrt{5})^2-2\cdot3+(\sqrt{3})^2=2$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{{}^{\text{ク}}2}$



よって　　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\angle\mathrm{ABC}<180^\circ$ であるから　　$\angle\mathrm{ABC}={}^{\text{ケコサ}}120^\circ$

さらに，AD∥BC であり，四角形 ABCD は等脚台形であるから

$$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{ADC}=180^\circ-\angle\mathrm{ABC}=180^\circ-120^\circ={}^{\text{シス}}60^\circ$$

ここで，B，C から辺 AD にそれぞれ垂線 BB′，CC′ を引くと，四角形 BCC′B′ は長方形であるから　　$\mathrm{B'C'}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$

また，直角三角形 ABB′ において　　$\mathrm{AB'}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

同様にして　　$\mathrm{DC'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって　　$\mathrm{AD}=\mathrm{AB'}+\mathrm{B'C'}+\mathrm{DC'}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

ゆえに，AD＝2BC であり，AD∥BC であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}={}^{\text{セ}}2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+2(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}-{}^{\text{ソ}}2\vec{b}+{}^{\text{タ}}2\vec{c}$

四角形 ABCD は台形であるから，その面積は

$$\frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{AD})\cdot\mathrm{BB'}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\cdot\mathrm{AB}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{{}^{\text{チ}}3\sqrt{{}^{\text{ツ}}3}}{{}^{\text{テ}}2}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\vec{c}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}={}^{\text{ト}}0$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(s\vec{a}+t\vec{c})-\vec{b}=s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=(s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{a}=s|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}=s\cdot1^2-1=s-1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=(s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{c}=s\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2=-3+t\cdot(\sqrt{5})^2=5t-3$$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{a}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\vec{c}=0$ より　　$s-1=0$，$5t-3=0$　　　よって　$s={}^{ナ}1$，$t=\dfrac{{}^{ニ}3}{{}^{ヌ}5}$

ゆえに　$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2=\left|\vec{a}-\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}\right|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+\frac{9}{25}|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{6}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{6}{5}\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=1^2+(\sqrt{3})^2+\frac{9}{25}\cdot(\sqrt{5})^2-2\cdot1-\frac{6}{5}\cdot3=\frac{1}{5}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|\geqq0$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{{}^{ネ}5}}{{}^{ノ}5}$

したがって，三角錐 BOAC の体積 V は，(1) より

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OAC}\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{{}^{ハ}1}{{}^{ヒ}6}$$

(4)　(四角錐 OABCD の体積)＝(三角錐 BOAC の体積)＋(三角錐 DOAC の体積) である。
三角錐 BOAC と三角錐 DOAC は，底面をそれぞれ △ABC，△ADC とみると高さが等しいから　　(三角錐 BOAC の体積) : (三角錐 DOAC の体積)

$$=\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BB'}:\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{CC'}$$

$$=\mathrm{BC}:\mathrm{AD}=1:2$$

よって，(三角錐 DOAC の体積)＝2(三角錐 BOAC の体積)＝$2V$ であるから

(四角錐 OABCD の体積)＝(三角錐 BOAC の体積)＋(三角錐 DOAC の体積)

$$=V+2V={}^{フ}3V$$

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さを h とすると，四角錐 OABCD の体積について　　$3V=\dfrac{1}{3}\cdot$(四角形 ABCD の面積)$\cdot h$

(2)，(3) より　　$3\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot h$　　　ゆえに　$h=\dfrac{\sqrt{{}^{ヘ}3}}{{}^{ホ}3}$