数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　$S_2 = 3 + 3\cdot 4 = {}^{アイ}15$

$\{T_n\}$ の階差数列が $\{S_n\}$ であるから　　$T_2 - T_1 = S_1$

よって　　$T_2 = T_1 + S_1 = -1 + 3 = {}^{ウ}2$

(2)　$S_n = \dfrac{3(4^n - 1)}{4-1} = {}^{エ}4^n - {}^{カ}1$　　(^{オ} ①)

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$T_n = T_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k = -1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4^k - 1) = -1 + \frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} - (n-1)$$

$$= -1 + \frac{1}{3}(4^n - 4) - n + 1 = \frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3}$$

初項 T_1 は $T_1 = -1$ であるから，これは $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　　$T_n = \dfrac{{}^{キ}4^n}{{}^{ケ}3} - n - \dfrac{{}^{コ}4}{{}^{サ}3}$　　(^{ク} ①)

(3)　$\{b_n\}$ の初項 b_1 は　　$b_1 = \dfrac{a_1 + 2T_1}{1} = -3 + 2\cdot(-1) = {}^{シス}-5$

(2) より，$T_n = \dfrac{4^n}{3} - n - \dfrac{4}{3}$ であるから

$$T_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3} - (n+1) - \frac{4}{3} = 4\cdot\frac{4^n}{3} - n - \frac{7}{3}$$

$$= 4\left(T_n + n + \frac{4}{3}\right) - n - \frac{7}{3} = {}^{セ}4T_n + {}^{ソ}3n + {}^{タ}3 \quad \cdots\cdots ①$$

$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ から　　$nb_n = a_n + 2T_n$　$\cdots\cdots$ ②

② において n を $n+1$ におき換えると　　$(n+1)b_{n+1} = a_{n+1} + 2T_{n+1}$　$\cdots\cdots$ ③

③×n − ②×$4(n+1)$ から

$$n(n+1)b_{n+1} - 4n(n+1)b_n = \{na_{n+1} - 4(n+1)a_n\} + \{2nT_{n+1} - 8(n+1)T_n\}$$

$\{a_n\}$ の漸化式より　　$n(n+1)(b_{n+1} - 4b_n) = 8T_n + 2nT_{n+1} - 8(n+1)T_n$

① より　　$n(n+1)(b_{n+1} - 4b_n) = 2n(4T_n + 3n + 3) - 8nT_n$

よって　　$n(n+1)(b_{n+1} - 4b_n) = 6n(n+1)$

$n(n+1) \fallingdotseq 0$ であるから　　$b_{n+1} - 4b_n = 6$

したがって，$\{b_n\}$ が満たす漸化式は　　$b_{n+1} = {}^{チ}4b_n + {}^{ツ}6$

これを変形して　　$b_{n+1} + 2 = 4(b_n + 2)$

よって，数列 $\{b_n + 2\}$ は，初項 $b_1 + 2 = -5 + 2 = -3$，公比 4 の等比数列であるから

$b_n + 2 = -3\cdot 4^{n-1}$　　　ゆえに　$b_n = {}^{テト}-3\cdot 4^{n-1} - {}^{ニ}2$　　(^{ナ} ⓪)

したがって，$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ から

$$a_n = nb_n - 2T_n = n(-3\cdot 4^{n-1} - 2) - 2\left(\frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3}\right)$$

$$=-3n\cdot4^{n-1}-2n-\frac{2\cdot4\cdot4^{n-1}}{3}+2n+\frac{8}{3}=\frac{{}^{ヌ}-({}^{ネ}9n+{}^{ノ}8)4^{n-1}+{}^{ハ}8}{{}^{ヒ}3}$$