数学Ⅱ・B　第2問

(1)　$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f(x)$ が $x=-1$ で極値2をとるから　　$f'(-1)={}^{ア}0$，$f(-1)=2$

ゆえに　　$3-2p+q=0$，$-1+p-q=2$

これを解くと　　$p=0$，$q=-3$

このとき　　$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

よって，右の増減表が得られ，$f(x)$ は $x=-1$ で極値2をとり，条件を満たす。

したがって　　$p={}^{イ}0$，$q={}^{ウエ}-3$

また，$f(x)$ は $x={}^{オ}1$ で極小値 ${}^{カキ}-2$ をとる。

(2)　$y=-kx^2$ から　　$y'=-2kx$

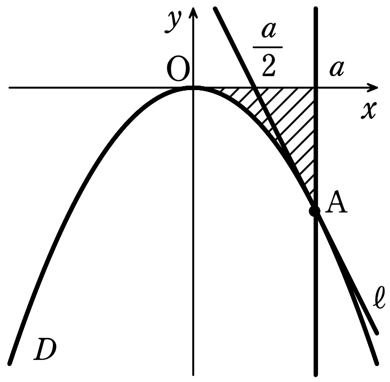
よって，ℓ の方程式は　　$y-(-ka^2)=-2ka(x-a)$

すなわち　　$y={}^{クケ}-2kax+ka^{{}^{コ}2}$　……①

① において $y=0$ とすると　　$0=-2kax+ka^2$　すなわち　$2kax=ka^2$

$k\neq 0$，$a\neq 0$ であるから　　$x=\dfrac{a}{2}$

ゆえに，ℓ と x 軸の交点の x 座標は　　$\dfrac{{}^{サ}a}{{}^{シ}2}$



D と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積は

$$-\int_0^a(-kx^2)dx=\int_0^a kx^2dx$$

$$=\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^a=\frac{k}{{}^{ス}3}a^{{}^{セ}3}$$

よって　　$S=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot ka^2=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{k}{4}a^3=\dfrac{k}{{}^{ソタ}12}a^3$

(3)　A が C 上にあるから　　$-ka^2=a^3-3a$

$a\neq 0$ であるから　　$k=\dfrac{{}^{チ}3}{{}^{ツ}a}-{}^{テ}a$

ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ の方程式は

$y-(b^3-3b)=(3b^2-3)(x-b)$

すなわち　$y={}^{ト}3(b^2-{}^{ナ}1)x-{}^{ニ}2b^3$　……②

② の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x)-g(x)=x^3-3x-\{3(b^2-1)x-2b^3\}=x^3-3b^2x+2b^3$$

$$=(x-{}^{ヌ}b)^2(x+{}^{ネ}2b)$$

この式から，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ は $x=b$ で接し，$x=-2b$ で交わることがわかる。

点 A は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ 上にあるから　　$f(a)=g(a)$

すなわち　$f(a)-g(a)=0$　　　よって　　$(a-b)^2(a+2b)=0$

① と ② の表す直線の y 切片を比較すると　　$ka^2=-2b^3$

$k>0$，$a>0$ より左辺は正であるから，$b^3<0$ であり　　$b<0$

よって，$a \fallingdotseq b$ であるから　　$a+2b=0$　　　ゆえに　$a=-2b$

① と ② の表す直線の傾きを比較すると　　$-2ka=3(b^2-1)$

k と b を消去すると　　$-2\left(\dfrac{3}{a}-a\right)a=3\left\{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2-1\right\}$

変形すると　　$-6+2a^2=\dfrac{3}{4}a^2-3$　　すなわち　　$\dfrac{5}{4}a^2=3$

よって　　$a^2=\dfrac{^{ノハ}12}{^{ヒ}5}$

したがって，求める S の値は

$$S=\frac{k}{12}a^3=\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{3}{a}-a\right)a^3=\frac{a^2}{4}-\frac{a^4}{12}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{5}-\frac{1}{12}\cdot\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{3}{5}-\frac{12}{25}=\frac{^{フ}3}{^{ヘホ}25}$$