

数学Ⅱ・B 第1問〔2〕

$$\begin{cases} \log_2(x+2) - 2\log_4(y+3) = -1 & \dots\dots ② \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

真数の条件により $x+2 > 0, y+3 > 0$ ゆえに $x > -2, y > -3$ (タ ②)

底の変換公式により $\log_4(y+3) = \frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(y+3)}{2}$

よって、②から $\log_2(x+2) - \log_2(y+3) = -1$
 $\log_2(y+3) = \log_2(x+2) + 1$
 $\log_2(y+3) = \log_2(x+2) + \log_2 2$
 $\log_2(y+3) = \log_2 2(x+2)$

したがって、 $y+3 = 2(x+2)$ から $y = 2x + 1$ …… ④

④を③に代入すると $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} - 11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 6 = 0$

両辺に3を掛けて $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 11\left(\frac{1}{3}\right)^x + 18 = 0$

$t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおくと $t^2 - 11t + 18 = 0$ …… ⑤

$x > -2, y > -3$ であるから $x > -2, 2x+1 > -3$
すなわち $x > -2, 2x+1 > -3$ ゆえに $x > -2$

$0 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ であるから $0 < t < 9$ …… ⑥

⑤から $(t-2)(t-9) = 0$ ⑥であるから $t = 2$

よって $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$ すなわち $3^x = \frac{1}{2}$ ゆえに $x = \log_3 \frac{1}{2}$

④から $y = 2\log_3 \frac{1}{2} + 1 = \log_3 \frac{1}{4} + \log_3 3 = \log_3 \left(\frac{1}{4} \times 3\right) = \log_3 \frac{3}{4}$

したがって、連立方程式②、③を満たす実数 x, y の値は

$$x = \log_3 \frac{1}{2}, \quad y = \log_3 \frac{3}{4}$$