数学Ⅱ・B　第 1 問〔1〕

(1)　$f(0)=3\cdot 0^2+4\cdot 0\cdot 1-1^2={}^{\text{アイ}}-1$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{4}={}^{\text{ウ}}2+\sqrt{{}^{\text{エ}}3}$$

(2)　2 倍角の公式により

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta,\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}$

ゆえに　$f(\theta)=3\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}+4\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$

$$={}^{\text{キ}}2\sin 2\theta-{}^{\text{ク}}2\cos 2\theta+{}^{\text{ケ}}1 \quad \cdots\cdots ①$$

(3)　三角関数の合成を用いると，① は

$$f(\theta)={}^{\text{コ}}2\sqrt{{}^{\text{サ}}2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{{}^{\text{シ}}4}\right)+1$$

と変形できる。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって　$-2\sqrt{2}+1\leqq f(\theta)\leqq 2\sqrt{2}+1$

ここで　$2\sqrt{2}+1=\sqrt{8}+1$

$\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$ より $2<\sqrt{8}<3$ であるから　$3<\sqrt{8}+1<4$

したがって，$f(\theta)$ のとり得る最大の整数の値 m は　$m={}^{\text{ス}}3$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において，$f(\theta)=3$ とすると

$$2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1=3$$

すなわち　$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ であるから　$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

ゆえに　$2\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \pi$　　よって　$\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{セ}}4},\ \dfrac{\pi}{{}^{\text{ソ}}2}$