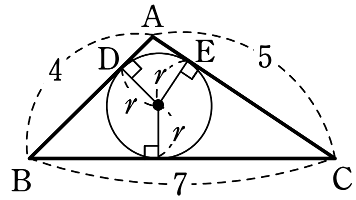
数学Ⅰ･A 第 5 問

△ABC の面積 S は



$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$=4\sqrt{6}$$

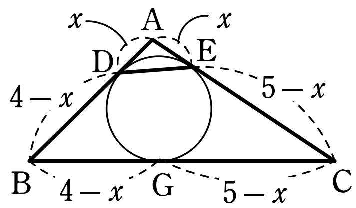
よって，△ABC の内接円の半径を r とおくと

$$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC})$$

ゆえに　$r=\dfrac{2S}{\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC}}=\dfrac{2\cdot 4\sqrt{6}}{4+7+5}=\dfrac{\sqrt{^{ア}6}}{^{イ}2}$

△ABC の内接円と辺 BC との接点を G とすると，3 辺 AB，AC，BC はそれぞれ点 D，E，G で △ABC の内接円に接しているから

$$\mathrm{AD}=\mathrm{AE},\ \mathrm{BD}=\mathrm{BG},\ \mathrm{CE}=\mathrm{CG}$$



$\mathrm{AD}=x$ とおくと，$\mathrm{AE}=x$，$\mathrm{BD}=4-x$，$\mathrm{CE}=5-x$ であるから　$\mathrm{BG}=4-x$，$\mathrm{CG}=5-x$

$\mathrm{BG}+\mathrm{CG}=\mathrm{BC}$ であるから　$(4-x)+(5-x)=7$

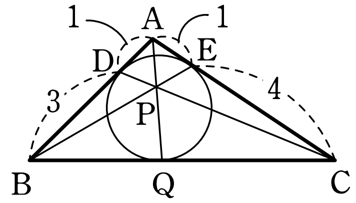
よって　$x=1$　　ゆえに　$\mathrm{AD}={}^{ウ}1$

△ADE において，余弦定理により

$$\mathrm{DE}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\cos\angle\mathrm{DAE}=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{5}$$

したがって　$\mathrm{DE}=\sqrt{\dfrac{12}{5}}=\dfrac{^{エ}2\sqrt{^{オカ}15}}{^{キ}5}$

右の図の△ABC にチェバの定理を用いると



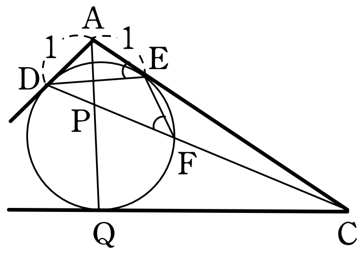
$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$$

すなわち　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{4}{1}=1$　　よって　$\dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}=\dfrac{^{ク}3}{^{ケ}4}$

$\mathrm{BC}=7$ であるから，$\mathrm{BQ}={}^{コ}3$，$\mathrm{CQ}=4$ で，2 点 G，Q は一致する。

ゆえに，点 Q は △ABC の内接円と辺 BC との接点であるから　$\mathrm{IQ}=r=\dfrac{\sqrt{^{サ}6}}{^{シ}2}$

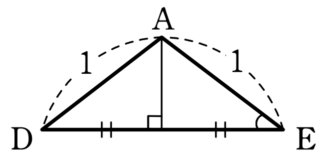
△ABC の内接円と辺 AC に対して，接線と弦の作る角の性質より　$\angle\mathrm{DFE}=\angle\mathrm{DEA}$



△ADE は $\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=1$ の二等辺三角形であるから

$$\cos\angle\mathrm{DEA}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{DE}}{\mathrm{AE}}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{5}$$



よって　$\cos\angle\mathrm{DFE}=\dfrac{\sqrt{^{スセ}15}}{^{ソ}5}$