数学Ⅰ・A　第 4 問

(1)　49 と 23 に互除法の計算を行うと

$49=23\cdot 2+3$　　移項すると　　$3=49-23\cdot 2$

$23=3\cdot 7+2$　　移項すると　　$2=23-3\cdot 7$

$3=2\cdot 1+1$　　移項すると　　$1=3-2\cdot 1$

よって　　$1=3-2\cdot 1=3-(23-3\cdot 7)\cdot 1=23\cdot(-1)+3\cdot 8=23\cdot(-1)+(49-23\cdot 2)\cdot 8$

$=49\cdot 8+23\cdot(-17)$

ゆえに，不定方程式 $49x-23y=1$ …… ① の整数解の 1 つは　　$x=8$，$y=17$

よって　　$49\cdot 8-23\cdot 17=1$　…… ②

①－② から　　$49(x-8)-23(y-17)=0$

すなわち　　$49(x-8)=23(y-17)$　…… ③

49 と 23 は互いに素であるから，$x-8$ は 23 の倍数である。

よって，k を整数として，$x-8=23k$ と表される。

これを ③ に代入すると　　$49\cdot 23k=23(y-17)$　　すなわち　　$y-17=49k$

ゆえに，不定方程式 ① の整数解は　　$x=23+8$，$y=49k+17$　(k は整数)

したがって，不定方程式 ① の解となる自然数 x，y の中で，x の値が最小となるのは

$k=0$ のときで，このとき　　$x={}^{\text{ア}}8$，$y={}^{\text{イウ}}17$

また，すべての整数解は，k を整数として $x={}^{\text{エオ}}23k+8$，$y={}^{\text{カキ}}49k+17$ と表せる。

(2)　m，n を自然数として，$A=49m$，$B=23n$ とおくと，A と B の差の絶対値が 1 となるとき，$49m-23n=1$ または $49m-23n=-1$ が成り立つ。

(1) より，$49m-23n=1$ を満たす自然数 m，n のうち，m が最小となるのは

$m=8$，$n=17$

また，不定方程式 $49x-23y=-1$ のすべての整数解は，(1) より

$x=-23l-8$，$y=-49l-17$　(l は整数)

よって，$49m-23n=-1$ を満たす自然数 m，n のうち，m が最小となるのは

$m=15$，$n=32$

したがって，A と B の差の絶対値が 1 となる組 $(A,\ B)$ の中で，A が最小になるのは

$(A,\ B)=(49\times{}^{\text{ク}}8,\ 23\times{}^{\text{ケコ}}17)$

A と B の差の絶対値が 2 となるとき，$49m-23n=2$ または $49m-23n=-2$ が成り立つ。

② の両辺に 2 を掛けて　　$49\cdot 16-23\cdot 34=2$

よって，同様に計算すると，$49x-23y=2$ のすべての整数解は

$x=23k'+16$，$y=49k'+34$　(k' は整数)

$49x-23y=-2$ のすべての整数解は

$x=-23l'-16$，$y=-49l'-34$　(l' は整数)

ゆえに，$49m-23n=2$ を満たす自然数 m，n のうち，m が最小となるのは

$m=16$，$n=34$

$49m-23n=-2$ を満たす自然数 m，n のうち，m が最小となるのは

$m=7$，$n=15$

したがって，A と B の差の絶対値が 2 となる組 $(A,\ B)$ の中で，A が最小になるのは

$$(A,\ B)=(49\times{}^{サ}7,\ 23\times{}^{シス}15)$$

(3) a と $a+2$ の最大公約数を g とおくと，$p<q$ を満たす自然数 p，q を用いて$a=pg$，$a+2=qg$ と表せる。

このとき，$2=(q-p)g$ で，$q-p$，g は自然数であるから　　$g=1,\ 2$

よって，a と $a+2$ の最大公約数は　　1 または ${}^{セ}2$

また，すべての自然数 a に対して，a，$a+1$，$a+2$ には 2 の倍数と 3 の倍数がともに含まれるから，$a(a+1)(a+2)$ は 6 の倍数である。

ゆえに，m は 6 の倍数である。

$a=1$ のとき，$a(a+1)(a+2)=6$ であるから，条件がすべての自然数 a で成り立つような自然数 m のうち，最大のものは　　$m={}^{ソ}6$

(4) 6762 を素因数分解すると　　$6762=2\times{}^{タ}3\times7^{{}^{チ}2}\times{}^{ツテ}23$

b，$b+1$，$b+2$ の中に $7^2\ (=49)$ の倍数と 23 の倍数が含まれるとき，(3) より $b(b+1)(b+2)$ は 6762 の倍数で，それは次の 3 通りが考えられる。

[1]　b，$b+1$，$b+2$ のいずれかが $49\times23\ (=1127)$ の倍数であるとき

b が最小になるのは，$b+2=1127$ のときで　　$b=1125$

[2]　b，$b+1$，$b+2$ のうち，連続する 2 つの自然数の一方が 49 の倍数，もう一方が 23 の倍数であるとき

b が最小になるのは，(2) より $b+1=23\times17$，$b+2=49\times8$ のときで　　$b=390$

[3]　b，$b+2$ のうち，一方が 49 の倍数，もう一方が 23 の倍数であるとき

b が最小になるのは，(2) より $b=49\times7$，$b+2=23\times15$ のときで　　$b=343$

[1]，[2]，[3] より，求める最小の自然数 b は　　$b={}^{トナニ}343$