

数学 I・A 第 3 問

(1) 1 回目の操作で、赤い袋から赤球が取り出される確率は $\frac{4}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{\text{ア}4}{\text{イ}9}$

1 回目の操作で、白い袋から赤球が取り出される確率は $\frac{2}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{\text{ウ}1}{\text{エ}6}$

(2) 2 回目の操作が白い袋で行われるには、1 回目の操作で白球が取り出されればよい。

(1) より、1 回目の操作で赤球が取り出される確率は $\frac{4}{9} + \frac{1}{6} = \frac{11}{18}$

よって、1 回目の操作で白球が取り出される確率は $1 - \frac{11}{18} = \frac{7}{18}$

したがって、2 回目の操作が白い袋で行われる確率は $\frac{\text{オ}7}{\text{カキ}18}$

(3) 2 回目の操作で白球が取り出されるのは次の 2 通りがある。

[1] 1 回目の操作で白球を取り出し、2 回目の操作で白い袋から白球を取り出す

このとき、2 回目の操作で白球を取り出す確率は $\frac{1}{2}p$

[2] 1 回目の操作で赤球を取り出し、2 回目の操作で赤い袋から白球を取り出す

1 回目の操作で赤球を取り出す確率は $1 - p$ であるから、2 回目の操作で白球を取り

出す確率は $\frac{1}{3}(1 - p)$

[1], [2] は互いに排反であるから、2 回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}(1 - p) = \frac{\text{ク}1}{\text{ケ}6}p + \frac{1}{3}$$

(2) より、 $p = \frac{7}{18}$ であるから、2 回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\frac{1}{6} \times \frac{7}{18} + \frac{1}{3} = \frac{\text{コサ}43}{\text{シスセ}108}$$

また、2 回目の操作で白球を取り出す確率を q で表すと、3 回目の操作で白球が取り出

される確率は、同様に考えると $\frac{1}{6}q + \frac{1}{3}$

$q = \frac{43}{108}$ であるから、3 回目の操作で白球が取り出される確率は

$$\frac{1}{6} \times \frac{43}{108} + \frac{1}{3} = \frac{\text{ソタチ}259}{\text{ツテト}648}$$

(4) 2 回目の操作で白球を取り出す事象を A 、2 回目の操作で白い袋から球を取り出す事象を B とすると、求める条件付き確率は $P_A(B)$ である。

(3) から、2 回目の操作で白球を取り出す確率 $P(A)$ は $P(A) = \frac{43}{108}$

(2) より、2 回目の操作で白い袋から白球を取り出す確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = \frac{7}{18} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{36}$$

よって、求める条件付き確率 $P_A(B)$ は $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{7}{36} \times \frac{108}{43} = \frac{21}{43}$

また、3回目の操作で白球を取り出す事象を C 、1回目、2回目の操作でともに赤球を取り出す事象を D とすると、求める条件付き確率は $P_C(D)$ である。

(3) から、3回目の操作で白球を取り出す確率 $P(C)$ は $P(C) = \frac{259}{648}$

(2) より、1回目、2回目の操作でともに赤球を取り出し、3回目の操作ではじめて白球を取り出す確率 $P(C \cap D)$ は $P(C \cap D) = \frac{11}{18} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{22}{162}$

よって、求める条件付き確率 $P_C(D)$ は

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{22}{162} \times \frac{648}{259} = \frac{88}{259}$$