数学Ⅱ･B　第 5 問

(1)　箱から 1 枚のカードを無作為に取り出すとき，$X=2a$ となる確率は　$\dfrac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}a}$

$a=5$ のとき，確率変数 X の確率分布は次の表のようになる。

X	2	4	6	8	10	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

よって，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{5}+8\cdot\frac{1}{5}+10\cdot\frac{1}{5}$$

$$=(2+4+6+8+10)\cdot\frac{1}{5}={}^{\text{ウ}}6$$

分散 $V(X)$ は　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$=2^2\cdot\frac{1}{5}+4^2\cdot\frac{1}{5}+6^2\cdot\frac{1}{5}+8^2\cdot\frac{1}{5}+10^2\cdot\frac{1}{5}-6^2$$

$$=(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\cdot\frac{1}{5}-36$$

$$=44-36={}^{\text{エ}}8$$

したがって　$E(sX+t)=sE(X)+t=6s+t$

$V(sX+t)=s^2V(X)=8s^2$

$E(sX+t)=20$，$V(sX+t)=32$ より　$6s+t=20$，$8s^2=32$

$s>0$ であるから　$s={}^{\text{オ}}2$，$t={}^{\text{カ}}8$

このとき，$2X+8\geqq 20$ を解くと　$X\geqq 6$

よって，$2X+8$ が 20 以上である確率は

$$P(6\leqq X\leqq 10)=P(X=6)+P(X=8)+P(X=10)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

$$=0.{}^{\text{キ}}6$$

(2)　取り出す 3 枚のカードをどのように選んでも，それらを横 1 列に並べる $3!=6$ 通りの並べ方のうち，数字が左から小さい順に並んでいる並べ方は 1 通りしかない。

よって，事象 A の起こる確率は　$\dfrac{{}^{\text{ク}}1}{{}^{\text{ケ}}6}$

事象 A が，ちょうど n 回起こる確率は，${}_{180}\mathrm{C}_n\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^{180-n}$ であるから，確率変数 Y は，二項分布 $B\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従う。

したがって，Y の平均 m は　$m=180\cdot\dfrac{1}{6}={}^{\text{コサ}}30$

分散 σ^2 は　$\sigma^2=180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}={}^{\text{シス}}25$

試行回数 180 は大きいことから，Y は近似的に正規分布 $N(30,\ 5^2)$ に従う。

ここで，$Z=\dfrac{Y-30}{5}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって　$P(18\leqq Y\leqq 36)=P(-{}^{セ}2.{}^{ソタ}40\leqq Z\leqq {}^{チ}1.{}^{ツテ}20)$

$=p(2.40)+p(1.20)$

$=0.4918+0.3841$

$=0.8767$

したがって　$P(18\leqq Y\leqq 36)=0.{}^{トナ}88$

(3)　400 人の有権者のうち，320 人が賛成であったから，標本比率 R は

$$R=\frac{320}{400}=\frac{4}{5}=0.{}^{ニ}8$$

また，標本の大きさは，$n=400$ であるから

$$\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=\sqrt{\frac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=0.02$$

したがって，p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$[0.8-1.96\cdot 0.02,\ 0.8+1.96\cdot 0.02]$$

すなわち　$[0.7608,\ 0.8392]$

よって　$0.{}^{ヌネ}76\leqq p\leqq 0.{}^{ノハ}84$

標本の大きさ n，標本比率 R の p に対する信頼度 95 % の信頼区間の幅は，n が大きいとき　$2\times 1.96\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}=3.92\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

よって　$L_1=3.92\sqrt{\dfrac{0.8\times(1-0.8)}{400}}=3.92\sqrt{\dfrac{0.16}{400}}$

$L_2=3.92\sqrt{\dfrac{0.6\times(1-0.6)}{400}}=3.92\sqrt{\dfrac{0.24}{400}}$

$L_3=3.92\sqrt{\dfrac{0.8\times(1-0.8)}{500}}=3.92\sqrt{\dfrac{0.16}{500}}$

したがって，$L_1<L_2$ かつ $L_3<L_1$ より　$L_3<L_1<L_2$

ゆえに　^{ヒ} ④