

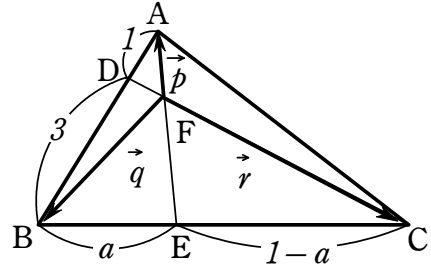
数学Ⅱ・B 第4問

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FA} = \vec{q} - \vec{p}$ (ア ②)

よって $|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{q} - \vec{p}|^2$
 $= |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$ …… ①

(2) 点 D は辺 AB を 1 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{FD} = \frac{3\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q}$$
 …… ②



(3) s, t をそれぞれ $\overrightarrow{FD} = s\vec{r}$, $\overrightarrow{FE} = t\vec{p}$ を満たす実数とする。

② により $\frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q} = s\vec{r}$

よって $\vec{q} = 4s\vec{r} - 3\vec{p}$ …… ③

点 E は辺 BC を $a : (1-a)$ に内分するから $\overrightarrow{FE} = (1-a)\vec{q} + a\vec{r}$

また, $\overrightarrow{FE} = t\vec{p}$ であるから $(1-a)\vec{q} + a\vec{r} = t\vec{p}$

よって $\vec{q} = \frac{t}{1-a}\vec{p} - \frac{a}{1-a}\vec{r}$ …… ④

$\vec{p} \neq \vec{0}$, $\vec{r} \neq \vec{0}$, $\vec{p} \nparallel \vec{r}$ であるから, ③, ④ より

$$-3 = \frac{t}{1-a}, \quad 4s = -\frac{a}{1-a}$$

したがって $s = \frac{-a}{4(1-a)}$, $t = -3(1-a)$

(4) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BE}|$, $|\vec{p}| = 1$ のとき, ① により

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 1 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$

また $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FB} = t\vec{p} - \vec{q}$

よって $|\overrightarrow{BE}|^2 = |t\vec{p} - \vec{q}|^2$
 $= t^2|\vec{p}|^2 - 2t\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$
 $= t^2 - 2t\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$

$t = -3(1-a)$ であるから

$$|\overrightarrow{BE}|^2 = 9(1-a)^2 + 6(1-a)\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$

$$= 9(a-1)^2 - 6(a-1)\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BE}|^2$ より

$$1 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2 = 9(a-1)^2 - 6(a-1)\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2$$

整理すると $2(3a-4)\vec{p} \cdot \vec{q} = (3a-2)(3a-4)$

$0 < a < 1$ より, $3a-4 \neq 0$ であるから $\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{3a-2}{2}$