数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　$\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると　　$a_n=a+(n-1)d$

$a_4=30$ より　　$a+3d=30$　…… ①

また，初項から第 8 項までの和が 288 であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 8(2a+7d)=288 \qquad \text{よって} \qquad 2a+7d=72 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② を解くと　　$a=-6$，$d=12$

したがって，$\{a_n\}$ の初項は アイ-6，公差は ウエ12

初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-6)+(n-1)\cdot 12\}=^{\text{オ}}6n^2-^{\text{カキ}}12n$$

(2)　$\{b_n\}$ の初項を b，公比を r とすると　　$b_n=b\cdot r^{n-1}$

$b_2=36$ より　　$br=36$　…… ③

また，初項から第 3 項までの和が 156 であるから　　$b(1+r+r^2)=156$　…… ④

③ より　　$b=\dfrac{36}{r}$

これを ④ に代入すると　　$\dfrac{36}{r}(1+r+r^2)=156$

整理すると　　$3r^2-10r+3=0$

すなわち　　$(3r-1)(r-3)=0$　　したがって　$r=\dfrac{1}{3}$，3

$r>1$ であるから　　$r=3$　　このとき　　$b=\dfrac{36}{3}=12$

したがって，$\{b_n\}$ の初項は クケ12，公比は コ3

初項から第 n 項までの和 T_n は　　$T_n=\dfrac{12(3^n-1)}{3-1}=^{\text{サ}}6(^{\text{シ}}3^n-^{\text{ス}}1)$

(3)　$d_n=c_{n+1}-c_n$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\{(n+1)-k+1\}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$$

$$=(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}\{(n+1)-k+1\}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(a_k-b_k)$$

$$=(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}[\{(n+1)-k+1\}-(n-k+1)](a_k-b_k)$$

$$=(a_{n+1}-b_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n+1}b_k$$

$$=S_{n+1}-T_{n+1}$$

よって　　$d_n=S_{n+1}-T_{n+1}$　　したがって　　セ ⑤

ゆえに，(1)，(2) により

$$d_n = 6(n+1)^2 - 12(n+1) - 6(3^{n+1} - 1)$$

$$= {}^{ソ}6n^2 - 2 \cdot {}^{タ}3^{n+{}^{チ}2}$$

また　　$c_1 = a_1 - b_1 = -6 - 12 = {}^{ツテト}-18$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$c_n = c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k$$

$$= -18 + \sum_{k=1}^{n-1}(6k^2 - 2 \cdot 3^{k+2})$$

$$= -18 + 6 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} - 18 \cdot \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$= -18 + n(n-1)(2n-1) - 27(3^{n-1} - 1)$$

$$= 2n^3 - 3n^2 + n + 9 - 3^{n+2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\{c_n\}$ の一般項は　　$c_n = {}^{ナ}2n^3 - {}^{ニ}3n^2 + n + {}^{ヌ}9 - 3^{n+{}^{ネ}2}$