# 数学Ⅱ･B　第 2 問

〔1〕 (1)　$y=px^2+qx+r$ から　　$y'=2px+q$

接線 $\ell$ の傾きは ${}^{\text{ア}}2$ であるから　　$2p\cdot 1+q=2$　　　よって　　$q={}^{\text{イウ}}-2p+{}^{\text{エ}}2$

また，$C$ が点 A$(1,\ 1)$ を通ることから　　$1=p\cdot 1^2+q\cdot 1+r$

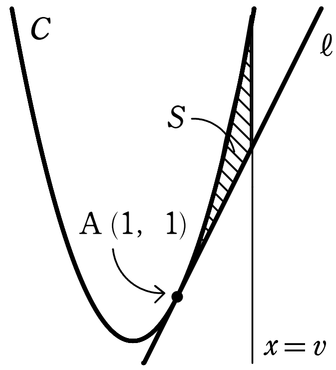
よって　　$r=-p-q+1=-p-(-2p+2)+1=p-{}^{\text{オ}}1$

(2)　$S=\displaystyle\int_1^v\{(px^2+qx+r)-(2x-1)\}dx$

$=\displaystyle\int_1^v[\{px^2+(-2p+2)x+(p-1)\}-2x+1]dx$

$=\displaystyle\int_1^v p(x^2-2x+1)dx=p\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_1^v$

$=\dfrac{p}{{}^{\text{カ}}3}(v^3-{}^{\text{キ}}3v^2+{}^{\text{ク}}3v-{}^{\text{ケ}}1)$



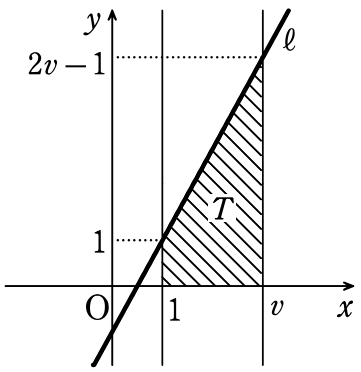

別解　($S$ の計算)

$$S=\int_1^v p(x^2-2x+1)dx=\int_1^v p(x-1)^2dx=p\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^v=\frac{p}{3}(v-1)^3$$

$$=\frac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)$$

また　　$T=\dfrac{1}{2}(v-1)\{1+(2v-1)\}$

$=v^{{}^{\text{コ}}2}-v$




よって　　$U=S-T=\dfrac{p}{3}(v^3-3v^2+3v-1)-(v^2-v)$

$=\dfrac{p}{3}v^3-(p+1)v^2+(p+1)v-\dfrac{p}{3}$

$U=g(v)$ とおくと　　$g'(v)=pv^2-2(p+1)v+p+1$

$g(v)$ は $v=2$ で極値をとるから　　$g'(2)=0$

よって　　$p\cdot 2^2-2(p+1)\cdot 2+p+1=0$　　　ゆえに　　$p={}^{\text{サ}}3$

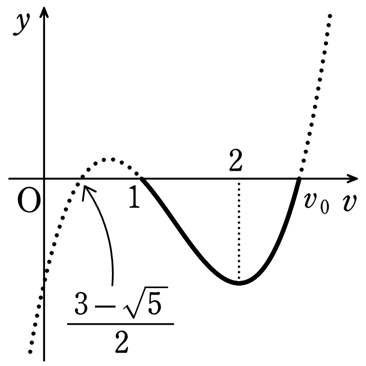
よって　　$g(v)=v^3-4v^2+4v-1$

$=(v-1)(v^2-3v+1)$

$g(v)=0$ とすると　　$v=1,\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$v_0>1$ より　　$v_0=\dfrac{{}^{\text{シ}}3+\sqrt{{}^{\text{ス}}5}}{{}^{\text{セ}}2}$

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<1<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}(=v_0)$ であるから，$1<v<v_0$ における $y=g(v)$ のグラフは右の図の実線部分のようになる。




ゆえに，$1<v<v_0$ の範囲で $U$ は，負の値のみをとる $({}^{\text{ソ}}③)$。

また，$v>1$ における $U$ の最小値は　　$g(2)=(2-1)(2^2-3\cdot 2+1)={}^{\text{タチ}}-1$

参考　$p=3$ のとき，$g(v)$ の増減表をかくと，確かに $v=2$ で極値をとることがわかる。

〔2〕 $f(x)$ とその不定積分 $F(x)$ について　　$F'(x)=f(x)$ （ツ ⑦）

$f(x)$ について，$x \geqq 1$ の範囲でつねに $f(x) \leqq 0$ であるから，$t>1$ のとき

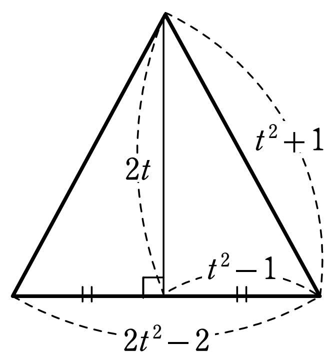
$$W=\int_1^t \{-f(x)\}dx$$

$$=-\int_1^t f(x)dx=-\int_1^t F'(x)dx$$

$$=-\Big[F(x)\Big]_1^t=-F(t)+F(1)$$ （テ ④）

一方，底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ $t^2+1$ の二等辺三角形について，高さは

$$\sqrt{(t^2+1)^2-(t^2-1)^2}=\sqrt{4t^2}=2t$$




よって，その面積は　　$\dfrac{1}{2}(2t^2-2)\cdot 2t=2t^3-2t$

ゆえに　　$W=2t^3-2t$

よって　　$-F(t)+F(1)=2t^3-2t$

すなわち　$F(t)=-2t^3+2t+F(1)$

両辺を $t$ で微分すると　　$F'(t)=-6t^2+2$

したがって　　$f(t)=$ ${}^{トナ}-6t^{{}^{ニ}2}+{}^{ヌ}2$