数学Ⅱ･B　第 1 問〔2〕

$x^{\log_3 x} \geqq \left(\dfrac{x}{c}\right)^3$ …… ② について，$\log_3 x$ の真数 x は正である。

これと $c>0$ より，② の両辺は正である。

$3\,(>1)$ を底とする ② の両辺の対数をとると　　$\log_3 x^{\log_3 x} \geqq \log_3\left(\dfrac{x}{c}\right)^3$

すなわち　　$(\log_3 x)^2 \geqq 3(\log_3 x - \log_3 c)$

$t=\log_3 x$ とおき，変形すると　　$t^{{}^{ツ}2} - {}^{タ}3t + 3\log_3 c \geqq 0$ …… ③

(前半)　$c=\sqrt[3]{9}$ のとき　　$3\log_3 c = 3\log_3 \sqrt[3]{9} = 3\log_3 3^{\frac{2}{3}} = 3\cdot\dfrac{2}{3} = 2$

よって，③ は　　$t^2-3t+2 \geqq 0$

$(t-1)(t-2) \geqq 0$

ゆえに　　$t \leqq {}^{チ}1$，$t \geqq {}^{ツ}2$

すなわち　　$\log_3 x \leqq 1$，$\log_3 x \geqq 2$

これと $x>0$ から　　${}^{テ}0 < x \leqq {}^{ト}3$，$x \geqq {}^{ナ}9$

(後半)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$t=\log_3 x$ のとり得る値の範囲は

実数全体（^{ニ}②）である。

よって，② が $x>0$ の範囲でつねに成り立つような c の値の範囲は，

③ がすべての実数 t でつねに成り立つ c の値の範囲

と一致する。

2 次方程式 $t^2-3t+3\log_3 c=0$ の判別式を D とすると，求める条件は

$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3\log_3 c \leqq 0$

よって　　$\log_3 c \geqq \dfrac{{}^{ヌ}3}{{}^{ネ}4}$　　　ゆえに　　$c \geqq 3^{\frac{3}{4}}$　すなわち　$c \geqq \sqrt[{}^{ノ}4]{{}^{ハヒ}27}$