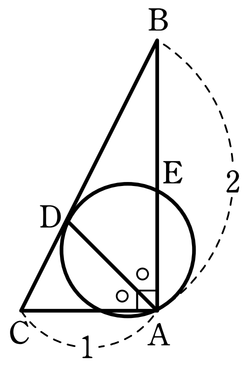
数学Ⅰ･A　第 5 問



三平方の定理により

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

角の二等分線の性質により

$$\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=2:1$$

よって　$\mathrm{BD}=\dfrac{2}{2+1}\mathrm{BC}=\dfrac{{}^{\text{ア}}2\sqrt{{}^{\text{イ}}5}}{{}^{\text{ウ}}3}$

方べきの定理により

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BE}=\mathrm{BD}^2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{{}^{\text{エオ}}20}{{}^{\text{カ}}9}$$

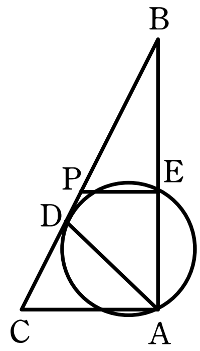
AB＝2 であるから

$$2\mathrm{BE}=\frac{20}{9}\qquad \text{すなわち}\qquad \mathrm{BE}=\frac{{}^{\text{キク}}10}{{}^{\text{ケ}}9}$$

また　$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{10}{9}\div\dfrac{2\sqrt{5}}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{5\sqrt{5}}{15}$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}=2\div\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{6\sqrt{5}}{15}$$

よって　$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}<\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$　（${}^{\text{コ}}$ ⓪）　……①



ここで，点 E を通り直線 AC に平行な直線と直線 BC との交点を P とする。

△BPE ∽△BCA であるから，$\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BP}}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$ となり，① より

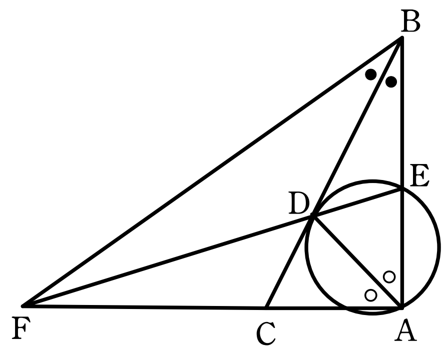
$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}}<\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BP}}\qquad \text{よって}\qquad \mathrm{BP}<\mathrm{BD}$$

したがって，辺 BC 上で点 D は点 P より点 C の側にあるから，直線 AC と直線 DE の交点は辺 AC の端点 C の側の延長上にある。（${}^{\text{サ}}$ ④）

△BAC と直線 EF にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=1$$

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}}\cdot\frac{\frac{8}{9}}{\frac{10}{9}}\cdot\frac{2}{1}=1$$



よって　$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{{}^{\text{シ}}5}{{}^{\text{ス}}8}$

AC＝1 であるから　　$\mathrm{CF}=\dfrac{5}{3}\mathrm{AC}=\dfrac{{}^{\text{セ}}5}{{}^{\text{ソ}}3}$

$\dfrac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AB}}$ より，BF : AB＝CF : AC であるから，直線 BC は ∠FBA の二等分線となる。また，直線 AD は ∠FAB の二等分線であるから，点 D は △ABF の内心であるこ

とがわかる。(タ ①)

参考　FC : CA＝5 : 3 であり，点 C が辺 FA の中点にないから，点 D は $\triangle$ABF の重心ではない。

また，$\angle$FAB＝90° であるから，$\triangle$ABF の外心は辺 BF 上にある。よって，点 D は $\triangle$ABF の外心ではない。