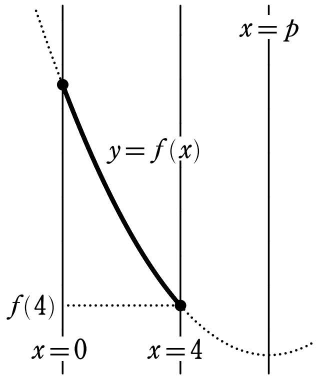
数学Ⅰ･A　第１問〔3〕

$$f(x)=a\left\{x^2-\frac{2}{a}(a+3)x\right\}-3a+21=a\left(x-\frac{a+3}{a}\right)^2-\frac{(a+3)^2}{a}-3a+21$$

$$=a\left(x-\frac{a+3}{a}\right)^2-a-6-\frac{9}{a}-3a+21=a\left(x-\frac{a+3}{a}\right)^2-4a-\frac{9}{a}+15$$

よって　　$p=\dfrac{a+3}{a}={}^{\text{サ}}1+\dfrac{{}^{\text{シ}}3}{a}$



$0\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるとき，

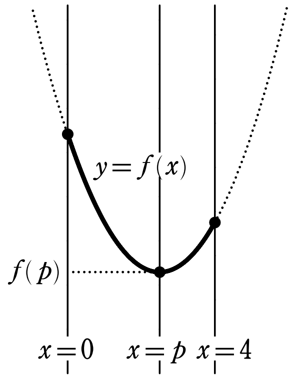
$4\leqq 1+\dfrac{3}{a}$ であるから　　$\dfrac{3}{a}\geqq 3$

$a>0$ であるから　　$0<a\leqq {}^{\text{ス}}1$

また，$0\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最小値が $f(p)$ となるとき，

$1+\dfrac{3}{a}\leqq 4$ であるから　　$\dfrac{3}{a}\leqq 3$

$a>0$ であるから　　${}^{\text{セ}}1\leqq a$



$f(4)=1$ とすると　　$16a-8(a+3)-3a+21=1$

ゆえに　　$a=\dfrac{4}{5}$

これは $0<a\leqq 1$ を満たす。

また，$f(p)=1$ とすると　　$-4a-\dfrac{9}{a}+15=1$

両辺に a を掛けて整理すると　　$4a^2-14a+9=0$

ゆえに　　$a=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{4}$

このうち，$1\leqq a$ を満たすものは　　$a=\dfrac{7+\sqrt{13}}{4}$

したがって，$0\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最小値が 1 であるのは，$a=\dfrac{{}^{\text{ソ}}4}{{}^{\text{タ}}5}$ または

$a=\dfrac{{}^{\text{チ}}7+\sqrt{{}^{\text{ツテ}}13}}{{}^{\text{ト}}4}$ のときである。