数学Ⅱ・B　第 5 問

(1)　確率変数 W は，n 回の反復試行において事象 A が起こる回数を表しているから，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。

よって　　$m=np$，$\sigma=\sqrt{np(1-p)}$

条件から　　$np=\dfrac{1216}{27}$　　……①

$$\sqrt{np(1-p)}=\frac{152}{27}\quad\cdots\cdots②$$

② から　　$np(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$

ゆえに，① から　　$\dfrac{1216}{27}(1-p)=\dfrac{152^2}{27^2}$

$$1-p=\frac{152^2}{27^2}\cdot\frac{27}{1216}$$

よって　　$1-p=\dfrac{19}{27}$

ゆえに　　$p=1-\dfrac{19}{27}=\dfrac{{}^{\text{エ}}8}{{}^{\text{オカ}}27}$

したがって，① から　　$n=\dfrac{1216}{27}\cdot\dfrac{27}{8}={}^{\text{アイウ}}152$

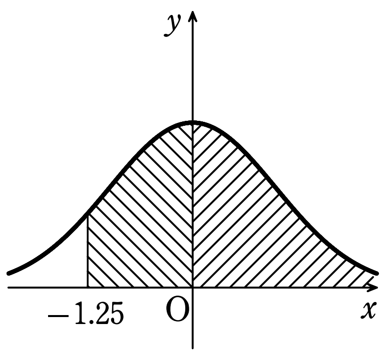
(2)　$W\geqq 38$ となる確率を求める場合，n は大きいと考えられるので，二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 W は，近似的に正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$\sigma>0$ であるから，$W\geqq 38$ のとき　　$\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq\dfrac{38-m}{\sigma}=\dfrac{38-\dfrac{1216}{27}}{\dfrac{152}{27}}=-1.25$

よって　　$P(W\geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq -{}^{\text{キ}}1.{}^{\text{クケ}}25\right)$

さらに，標準正規分布の分布曲線が y 軸に関して対称であることから



$$P(Z\geqq -1.25)=P(Z\geqq 0)+P(-1.25\leqq Z\leqq 0)$$
$$=0.5+P(0\leqq Z\leqq 1.25)$$

ここで，正規分布表より

$$P(0\leqq Z\leqq 1.25)=0.3944$$

であるから

$$P(Z\geqq -1.25)=0.5+0.3944=0.8944$$

よって　　$P(Z\geqq -1.25)=0.{}^{\text{コサ}}89$

(3)　確率変数 X について，$a \leqq X \leqq \frac{3}{2}a$ となる確率 $P\left(a \leqq X \leqq \frac{3}{2}a\right)$ は

$$P\left(a \leqq X \leqq \frac{3}{2}a\right) = \int_a^{\frac{3}{2}a} f(x)\,dx = \int_a^{\frac{3}{2}a} \frac{1}{3a^2}(2a-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3a^2}\left[2ax - \frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$

$$= \frac{1}{3a^2}\left[\left\{2a\cdot\frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\right\} - \left(2a\cdot a - \frac{1}{2}a^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3a^2}\cdot\frac{3}{8}a^2 = \frac{{}^{\text{シ}}1}{{}^{\text{ス}}8}$$

また，確率変数 X の平均は

$$E(X) = \int_{-a}^{2a} xf(x)\,dx = \int_{-a}^{0} x\cdot\frac{2}{3a^2}(x+a)\,dx + \int_0^{2a} x\cdot\frac{1}{3a^2}(2a-x)\,dx$$

$$= \frac{2}{3a^2}\int_{-a}^{0} x(x+a)\,dx + \frac{1}{3a^2}\int_0^{2a} x(2a-x)\,dx$$

$$= \frac{2}{3a^2}\left[-\frac{1}{6}\{0-(-a)\}^3\right] + \frac{1}{3a^2}\left\{\frac{1}{6}(2a-0)^3\right\}$$

$$= -\frac{a}{9} + \frac{4a}{9}$$

$$= \frac{{}^{\text{セ}}a}{{}^{\text{ソ}}3}$$

確率変数 Y は $Y = 2X + 7$ を満たすから

$$E(Y) = E(2X+7) = 2E(X) + 7 = 2\cdot\frac{a}{3} + 7 = \frac{{}^{\text{タチ}}2a}{{}^{\text{ツ}}3} + {}^{\text{テ}}7$$

参考　連続型確率変数 X と定数 a，b に対しても，$Y = aX + b$ とすると，Y も確率変数となり，Y の平均 (期待値) $E(Y)$，分散 $V(Y)$ について

$$E(Y) = aE(X) + b,\quad V(Y) = a^2V(X)$$

が成り立つ。