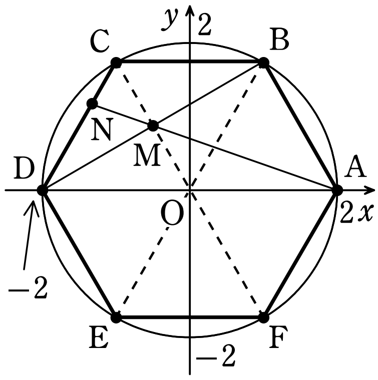
数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$\angle \mathrm{AOB}=60^\circ$ であるから，点 B の座標は　　$(2\cos 60^\circ,\ 2\sin 60^\circ)$

すなわち　　$({}^{\text{ア}}1,\ \sqrt{{}^{\text{イ}}3})$

点 D は x 軸上にあるから，点 D の座標は　　$(-{}^{\text{ウ}}2,\ 0)$

(2)　点 M は線分 BD の中点であるから，点 M の座標は



$$\left(\frac{1+(-2)}{2},\ \frac{\sqrt{3}+0}{2}\right)$$

すなわち　　$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(-\dfrac{1}{2}-2,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}-0\right)$

$$=\left(-\frac{{}^{\text{エ}}5}{{}^{\text{オ}}2},\ \frac{\sqrt{{}^{\text{カ}}3}}{{}^{\text{キ}}2}\right)$$

また，DC∥OB，DC＝OB であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=({}^{\text{ク}}1,\ \sqrt{{}^{\text{ケ}}3})$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 r，s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(2,\ 0)+r\left(-\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(2-\frac{5}{2}r,\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(-2,\ 0)+s(1,\ \sqrt{3})=(-2+s,\ \sqrt{3}\,s)$$

と表せる。

よって　　$2-\dfrac{5}{2}r=-2+s$　…… ①，　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}r=\sqrt{3}\,s$　…… ②

② から　　$r=2s$　…… ③

$r=2s$ を ① に代入して　　$2-\dfrac{5}{2}\cdot 2s=-2+s$

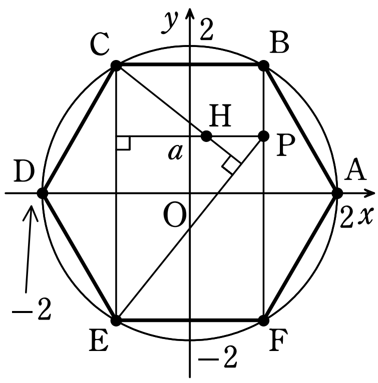
整理すると　　$6s=4$

よって　　$s=\dfrac{{}^{\text{シ}}2}{{}^{\text{ス}}3}$

③ から　　$r=2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{{}^{\text{コ}}4}{{}^{\text{サ}}3}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-2+\dfrac{2}{3},\ \sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{3}\right)=\left(-\dfrac{{}^{\text{セ}}4}{{}^{\text{ソ}}3},\ \dfrac{{}^{\text{タ}}2\sqrt{{}^{\text{チ}}3}}{{}^{\text{ツ}}3}\right)$

(3)　点 B と点 E は原点に関して対称であるから，点 E の座標は　　$(-1,\ -\sqrt{3})$



また，$\angle \mathrm{AOC}=120^\circ$ であるから，点 C の座標は

$$(2\cos 120^\circ,\ 2\sin 120^\circ)$$

すなわち　　$(-1,\ \sqrt{3})$

点 C と点 F は原点に関して対称であるから，点 F の座標は　　$(1,\ -\sqrt{3})$

点 P は線分 BF 上にあり，y 座標は a であるから，点 P の座標は　　$(1,\ a)$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=(1-(-1),\ a-(-\sqrt{3}))=({}^{\text{テ}}2,\ {}^{\text{ト}}a+\sqrt{{}^{\text{ナ}}3})$

点 H は点 P から直線 CE に引いた垂線上にあり，この垂線は x 軸に平行であるから，
点 H の y 座標は a である。

点 H の x 座標を x_0 とおくと　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(x_0-(-1),\ a-\sqrt{3})=(x_0+1,\ a-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}=0$

ここで　　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}=(x_0+1)\cdot 2+(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})=2x_0+2+a^2-3$

$$=2x_0+a^2-1$$

であるから　　$2x_0+a^2-1=0$

ゆえに　　$x_0=\dfrac{-a^2+1}{2}$

したがって，点 H の座標は　　$\left(\dfrac{{}^{\text{ニ}}-a^{{}^{\text{ヌ}}2}+{}^{\text{ネ}}1}{{}^{\text{ノ}}2},\ {}^{\text{ハ}}a\right)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{1^2+a^2}=\sqrt{a^2+1}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{\left(\frac{-a^2+1}{2}\right)^2+a^2}=\sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{2^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{2^2}}=\frac{a^2+1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=1\cdot\frac{-a^2+1}{2}+a^2=\frac{a^2+1}{2}$$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}=\frac{a^2+1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\frac{2}{a^2+1}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ であるから　　$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{12}{13}$

両辺を 2 乗して整理すると　　$a^2+1=\left(\dfrac{13}{12}\right)^2$

よって　　$a^2=\dfrac{25}{12^2}=\left(\dfrac{5}{12}\right)^2$

したがって　　$a=\pm\dfrac{{}^{\text{ヒ}}5}{{}^{\text{フヘ}}12}$