数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　数列 $\{s_n\}$ は，初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$$s_1=1,\ s_2=1\cdot 2=2,\ s_3=2\cdot 2=4$$

よって　$s_1s_2s_3=1\cdot 2\cdot 4={}^{ア}8$

$$s_1+s_2+s_3=1+2+4={}^{イ}7$$

(2)　数列 $\{s_n\}$ は，初項 x，公比 r の等比数列であるから　$s_n=xr^{n-1}$

よって　$s_1=x,\ s_2=xr,\ s_3=xr^2$

ゆえに　$s_1s_2s_3=x\cdot xr\cdot xr^2=x^3r^3$

$$s_1+s_2+s_3=x+xr+xr^2=x(1+r+r^2)$$

① から　$x^3r^3=a^3$

$r,\ x,\ a$ はすべて実数であるから　$xr={}^{ウ}a$

② から　$x(1+r+r^2)=b$

両辺に r を掛けて　$xr(1+r+r^2)=br$

よって　$a(1+r+r^2)=br$

整理すると　${}^{エ}ar^2+({}^{オ}a-{}^{カ}b)r+{}^{キ}a=0$

$a\fallingdotseq 0$ であるから，2 次方程式 ④ の判別式を D とすると

$$D=(a-b)^2-4a^2=-3a^2-2ab+b^2$$

④ を満たす実数 r が存在するための条件は $D\geqq 0$ であるから

$$-3a^2-2ab+b^2\geqq 0$$

よって　${}^{ク}3a^2+{}^{ケ}2ab-b^2\leqq 0$

(3)　$a=64,\ b=336$ のとき，(2) から実数 r は

$$64r^2+(64-336)r+64=0$$

を満たす。

整理すると　$4r^2-17r+4=0$

$$(r-4)(4r-1)=0$$

よって　$r=4,\ \dfrac{1}{4}$

$r>1$ であるから　$r={}^{コ}4$

③ から　$x=\dfrac{64}{4}={}^{サシ}16$

したがって，数列 $\{s_n\}$ の一般項は　$s_n=16\cdot 4^{n-1}=4^{n+1}$

よって，数列 $\{t_n\}$ の一般項は

$$t_n=s_n\log_4 s_n=4^{n+1}\log_4 4^{n+1}=(n+{}^{ス}1)\cdot 4^{n+{}^{セ}1}$$

数列 $\{t_n\}$ の初項から第 n 項までの和 U_n は

$$U_n=2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+\cdots\cdots+n\cdot 4^n+(n+1)\cdot 4^{n+1}\quad\cdots\cdots ⑥$$

を満たす。

⑥×4 から　$4U_n=\qquad 2\cdot 4^3+3\cdot 4^4+\cdots\cdots+n\cdot 4^{n+1}+(n+1)\cdot 4^{n+2}\quad\cdots\cdots ⑦$

⑥－⑦ から $-3U_n=2\cdot 4^2+4^3+4^4+\cdots\cdots+4^{n+1}-(n+1)\cdot 4^{n+2}$

$$=32+\frac{4^3(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n+1)\cdot 4^{n+2}$$

$$=\frac{96+4^{n+2}-64-(3n+3)\cdot 4^{n+2}}{3}$$

$$=\frac{32-(3n+2)\cdot 4^{n+2}}{3}$$

したがって $U_n=-\dfrac{32-(3n+2)\cdot 4^{n+2}}{3\cdot 3}=\dfrac{{}^{ソ}3n+{}^{タ}2}{{}^{チ}9}\cdot 4^{n+{}^{ツ}2}-\dfrac{{}^{テト}32}{{}^{ナ}9}$