# 数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　$C$ 上の点 $(t,\ t^2+1)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ より

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)$$

$$y={}^{\text{ア}}2tx-t^2+{}^{\text{イ}}1$$

である。この直線が P を通るとすると，$t$ は方程式

$$2a=2t\cdot a-t^2+1$$

すなわち　$t^2-{}^{\text{ウ}}2at+{}^{\text{エ}}2a-{}^{\text{オ}}1=0$

を満たすから，これを解くと

$$t^2-2at+2a-1=0$$

$$\{t-(2a-1)\}(t-1)=0$$

よって　　　$t={}^{\text{カ}}2a-{}^{\text{キ}}1,\ {}^{\text{ク}}1$

P を通る $C$ の接線が 2 本存在するための条件は，この 2 次方程式が相異なる 2 つの実数解をもつことより　$2a-1\neq 1$　すなわち　$a\neq {}^{\text{ケ}}1$

このとき，それら 2 本の接線の方程式は

$t=2a-1$ のとき　　$y=2(2a-1)x-(2a-1)^2+1$

すなわち　$y=({}^{\text{コ}}4a-{}^{\text{サ}}2)x-{}^{\text{シ}}4a^2+{}^{\text{ス}}4a$　である。

また，$t=1$ のとき　　$y=2\cdot 1\cdot x-1^2+1$

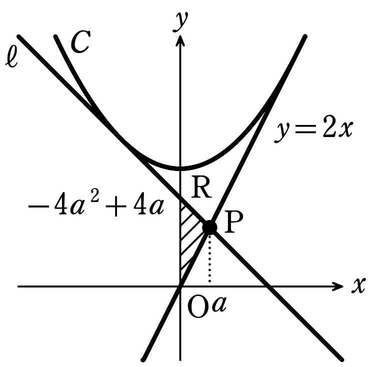
すなわち　$y={}^{\text{セ}}2x$　である。

(2)　直線 $y=(4a-2)x-4a^2+4a$ を $\ell$ とする。

$\ell$ と $y$ 軸との交点を R$(0,\ r)$ とすると，$r=-4a^2+4a$ である。

よって，$r>0$ となるための条件は　　$-4a^2+4a>0$

$$a(a-1)<0$$




したがって ${}^{\text{ソ}}0<a<{}^{\text{タ}}1$ である。

このとき，三角形 OPR の面積 $S$ は

$$S=\frac{1}{2}\cdot(-4a^2+4a)\cdot a$$

$$={}^{\text{チ}}2\left(a^{{}^{\text{ツ}}2}-a^{{}^{\text{テ}}3}\right)$$

となる。

ゆえに　$S'=2(2a-3a^2)=2a(2-3a)$

$S'=0$ とすると，$0<a<1$ より　$a=\dfrac{2}{3}$

よって，$S$ の増減表は右のようになる。

したがって，$S$ は $a=\dfrac{{}^{\text{ト}}2}{{}^{\text{ナ}}3}$ のとき，最大値 $\dfrac{{}^{\text{ニ}}8}{{}^{\text{ヌネ}}27}$ をとる。

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S$ | | $\nearrow$ | $\frac{8}{27}$ | $\searrow$ | |

(3)　直線 $x=a$ と $x$ 軸との交点を Q とする。

$0<a<1$ のとき，放物線 $C$ と (2) の直線 $\ell$ および 2 直線 $x=0$，$x=a$ で囲まれた図形は

$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，右の図 1 のようになり，

$\dfrac{1}{2}<a<1$ のとき，右の図 2 のようになる。

図 1

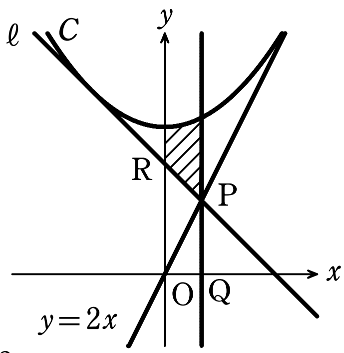
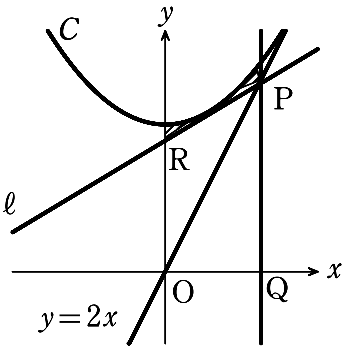



図 2




よって，求める面積 $T$ は

$$T=\int_0^a (x^2+1)dx-(\text{台形 ORPQ})$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a-\frac{1}{2}\cdot a\cdot\{2a+(-4a^2+4a)\}$$

$$=\frac{{}^{ノ}7}{{}^{ハ}3}a^3-{}^{ヒ}3a^2+{}^{フ}a$$

$T'=7a^2-6a+1$ より，$T'=0$ のとき　$a=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{7}$

よって，$T$ の増減表は次のようになる。

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{3-\sqrt{2}}{7}$ | $\cdots$ | $\frac{3+\sqrt{2}}{7}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $T$ | | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ | |

ここで，$\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3\sqrt{2}-5}{21}<0$ より　$\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}<\dfrac{2}{3}$

したがって，$\dfrac{2}{3}\leqq a<1$ の範囲において，$T$ は増加する。　（ヘ ②）