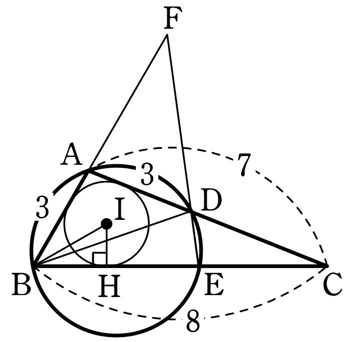
数学Ⅰ・A　第 5 問

(1)　方べきの定理により　　$\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CD}$



これと $\mathrm{CD}=\mathrm{AC}-\mathrm{AD}=7-3=4$ から

$$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}=7\cdot4={}^{\text{アイ}}28$$

よって　　$\mathrm{CE}=\dfrac{28}{\mathrm{BC}}=\dfrac{28}{8}=\dfrac{{}^{\text{ウ}}7}{{}^{\text{エ}}2}$

ゆえに　　$\mathrm{BE}=\mathrm{BC}-\mathrm{CE}=8-\dfrac{7}{2}=\dfrac{9}{2}$

△ABC と直線 FE について，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EB}}=1$$

すなわち　　$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}}=1$　　　よって　　$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{{}^{\text{オカ}}12}{{}^{\text{キ}}7}$

これと $\mathrm{BF}=\mathrm{AF}+\mathrm{AB}=\mathrm{AF}+3$ から　　$\dfrac{\mathrm{AF}+3}{\mathrm{AF}}=\dfrac{12}{7}$

これを解いて　　$\mathrm{AF}=\dfrac{{}^{\text{クケ}}21}{{}^{\text{コ}}5}$

(2)　△ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8}=\frac{1}{2}$$

よって　　$\angle\mathrm{ABC}={}^{\text{サシ}}60^\circ$

ここで，△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

さらに，△ABC の内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})r=\frac{1}{2}(3+8+7)r=9r$$

ゆえに　　$9r=6\sqrt{3}$　　　　したがって　　$r=\dfrac{{}^{\text{ス}}2\sqrt{{}^{\text{セ}}3}}{{}^{\text{ソ}}3}$

△ABC の内心 I から直線 BC に垂線 IH を下ろすと　　$\mathrm{IH}=r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

また，直線 BI は ∠ABC の二等分線であるから　　$\angle\mathrm{IBH}=30^\circ$

したがって，△BIH は $\angle\mathrm{B}=30^\circ$，$\angle\mathrm{I}=60^\circ$，$\angle\mathrm{H}=90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\mathrm{BI}=2\mathrm{IH}=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{{}^{\text{タ}}4\sqrt{{}^{\text{チ}}3}}{{}^{\text{ツ}}3}$$