数学Ⅰ･A 第 4 問

(1)　$37a$ が 4 で割り切れるのは，下 2 桁の $7a$ が 4 の倍数のときである。

$70+a$ が 4 の倍数になるとき　　$a={}^{ア}2$，${}^{イ}6$　　(または $a={}^{ア}6$，${}^{イ}2$)

(2)　$7b5c$ が 4 で割り切れるのは，下 2 桁の $5c$ が 4 の倍数のときである。

$50+c$ が 4 の倍数になるとき　　$c=2$，6

さらに，$7b5c$ が 9 で割り切れるのは，$7+b+5+c=b+c+12$ が 9 の倍数のときである。

[1]　$c=2$ のとき

$b+c+12=b+14$ が 9 の倍数となるのは，$b=4$ のときである。

[2]　$c=6$ のとき

$b+c+12=b+18$ が 9 の倍数となるのは，$b=0$，9 のときである。

[1]，[2] より，$7b5c$ が 4 でも 9 でも割り切れる b，c の組は，全部で　$1+2={}^{ウ}3$ (個)

これらのうち，$7b5c$ の値が最小になるのは，$b={}^{エ}0$，$c={}^{オ}6$ のときである。

$7b5c$ の値が最大になるのは，$b={}^{カ}9$，$c={}^{キ}6$ のときである。

また，$7b5c=(6\times n)^2$ において，$(6\times n)^2=4\times 9\times n^2$ (n は自然数) であるから，これを満たす 4 桁の自然数 $7b5c$ は 4 でも 9 でも割り切れなければならない。

よって　　$(b,\ c)=(0,\ 6)$，$(4,\ 2)$，$(9,\ 6)$

[1]　$(b,\ c)=(0,\ 6)$ のとき

$7b5c=7056=4\times 9\times 196$ であり，$196=14^2$ であるから　　$7b5c=(6\times 14)^2$

よって，条件を満たす。

[2]　$(b,\ c)=(4,\ 2)$ のとき

$7b5c=7452=4\times 9\times 207$ となり，207 は平方数でないから，条件を満たさない。

[3]　$(b,\ c)=(9,\ 6)$ のとき

$7b5c=7956=4\times 9\times 221$ となり，221 は平方数でないから，条件を満たさない。

[1]～[3] より　　$b={}^{ク}0$，$c={}^{ケ}6$，$n={}^{コサ}14$

(3)　$1188=2^2\cdot 3^3\cdot 11$ であるから，1188 の正の約数は全部で

$$(2+1)(3+1)(1+1)=3\cdot 4\cdot 2={}^{シス}24\ (個)$$

これらのうち，2 の倍数は素因数 2 を 1 個以上含むものであり，その個数は $2\cdot 3^3\cdot 11$ の正の約数の個数と等しいから　　$(1+1)(3+1)(1+1)=2\cdot 4\cdot 2={}^{セソ}16$ (個)

4 の倍数は素因数 2 を 2 個含むものであり，その個数は $3^3\cdot 11$ の正の約数の個数と等しいから　　$(3+1)(1+1)=4\cdot 2={}^{タ}8$ (個)

また，1188 のすべての正の約数の積 N を 2 進法で表したとき，末尾に連続して並ぶ 0 の個数は，N を素因数分解したときの素因数 2 の個数と等しい。

1188 の正の約数のうち，2 の倍数は 16 個，4 の倍数は 8 個，8 の倍数はないから，求める個数は　　$16+8={}^{チツ}24$ (個)

$\boxed{参考}$　$1188=2^2\cdot 3^3\cdot 11$ のすべての正の約数の積 N を求めると

$$N=2^{2\cdot 4\cdot 2+1\cdot 4\cdot 2}\cdot 3^{3\cdot 3\cdot 2+3\cdot 2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 2}\cdot 11^{3\cdot 4\cdot 1}=2^{24}\cdot 3^{36}\cdot 11^{12}$$