数学Ⅰ・A 第 3 問

(1) 「A，B の少なくとも一方があたりのくじを引く」という事象 E_1 は，「A，B がともにはずれのくじを引く」という事象の余事象である。

A，B がともにはずれのくじを引く確率は　$\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

よって　$P(E_1)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{{}^{\text{ア}}5}{{}^{\text{イ}}6}$

(2) A，B，C の 3 人で 2 本のあたりのくじを引く事象 E は，次の 3 つの排反な事象の和事象である。

[1] B，C の 2 人があたる，すなわち A だけがはずれのくじを引く

[2] A，C の 2 人があたる，すなわち B だけがはずれのくじを引く

[3] A，B の 2 人があたる，すなわち C だけがはずれのくじを引く

よって　${}^{\text{ウ，エ，オ}}$①，③，⑤

ゆえに　$P(E)=\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{{}^{\text{カ}}1}{{}^{\text{キ}}2}$

(3) 事象 E_1 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率は　$P_{E_1}(E)=\dfrac{P(E_1\cap E)}{P(E_1)}$

ここで，事象 $E_1\cap E$ は次の 3 つの排反な事象の和事象である。

[1] A がはずれ B があたり C があたる，すなわち A だけがはずれのくじを引く

[2] A があたり B がはずれ C があたる，すなわち B だけがはずれのくじを引く

[3] A があたり B があたり C がはずれる，すなわち C だけがはずれのくじを引く

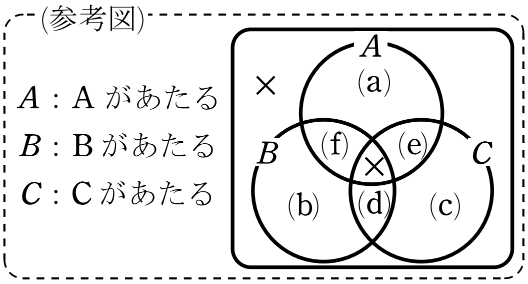
よって，$E_1\cap E=E$ であるから，(2) より　$P(E_1\cap E)=P(E)=\dfrac{1}{2}$

また，(1) より $P(E_1)=\dfrac{5}{6}$ であるから　$P_{E_1}(E)=\dfrac{P(E_1\cap E)}{P(E_1)}=\dfrac{1}{2}\div\dfrac{5}{6}=\dfrac{{}^{\text{ク}}3}{{}^{\text{ケ}}5}$

(4) B，C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_2 は，

(a) B，C の 2 人がはずれのくじを引く，すなわち A だけがあたる

という事象の余事象であり，次の (b) ～ (f) の 5 つの排反な事象の和事象である。



(b) B だけがあたる，すなわち A，C の 2 人がはずれのくじを引く

(c) C だけがあたる，すなわち A，B の 2 人がはずれのくじを引く

(d) B，C の 2 人があたる，すなわち A だけがはずれのくじを引く

(e) A，C の 2 人があたる，すなわち B だけがはずれのくじを引く

(f) A，B の 2 人があたる，すなわち C だけがはずれのくじを引く

ここで，(b)，(c)，(d) の 3 つの事象の和事象は，A がはずれのくじを引く事象である。

よって　${}^{\text{コ，サ，シ}}$⓪，③，⑤

ゆえに　$P(E_2)=\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{{}^{\text{ス}}5}{{}^{\text{セ}}6}$

また，A，C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_3 は，(a)，(c)，(d)，(e)，(f) の 5 つの排反な事象の和事象であり，(a)，(e)，(f) の 3 つの事象の和事象は，A があたりのくじを引く事象である。

よって　　$P(E_3)=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{{}^{\text{ソ}}5}{{}^{\text{タ}}6}$

(5)　$p_1=P_{E_1}(E)=\frac{3}{5}$ であり　　$p_2=P_{E_2}(E)=\frac{P(E_2\cap E)}{P(E_2)}$，$p_3=P_{E_3}(E)=\frac{P(E_3\cap E)}{P(E_3)}$

(3) と同様に考えると，$E_1\cap E=E_2\cap E=E_3\cap E=E$ から

$$P(E_1\cap E)=P(E_2\cap E)=P(E_3\cap E)=P(E)=\frac{1}{2}$$

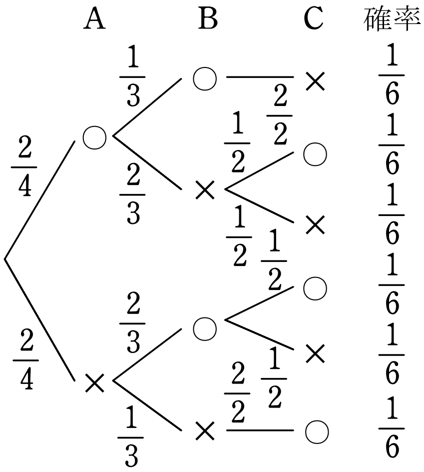
また，(1)，(4) より　　$P(E_1)=P(E_2)=P(E_3)=\frac{5}{6}$

よって　　$p_1=p_2=p_3=\frac{3}{5}$　　　　したがって　　${}^{\text{チ}}$⑥

参考　A，B，C の引いたくじについて，例えば A があたり，B があたり，C がはずれのくじを引くことを，左から ABC の順に ○○× で表す。
このとき，全事象 U は，右の樹形図より，

$U=\{$ ○○×，○×○，○××，×○○，×○×，××○ $\}$

であり，これらの根元事象は同様に確からしいものとみなすことができる。
これを利用すると，次のように解答することもできる。



(1)　$E_1=\{$ ○○×，○×○，○××，×○○，×○× $\}$ より　　$P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(U)}=\frac{{}^{\text{ア}}5}{{}^{\text{イ}}6}$

(2)　$E=\{$ ○○×，○×○，×○○ $\}$ より，$P(E)=\frac{n(E)}{n(U)}=\frac{3}{6}=\frac{{}^{\text{カ}}1}{{}^{\text{キ}}2}$ であり

${}^{\text{ウ，エ，オ}}$①，③，⑤

(3)　$E_1\cap E=E$ であるから　　$P_{E_1}(E)=\frac{n(E_1\cap E)}{n(E_1)}=\frac{n(E)}{n(E_1)}=\frac{{}^{\text{ク}}3}{{}^{\text{ケ}}5}$

(4)　$E_2=\{$ ○○×，○×○，×○○，×○×，××○ $\}$ より　　$P(E_2)=\frac{n(E_2)}{n(U)}=\frac{{}^{\text{ス}}5}{{}^{\text{セ}}6}$

事象 $\{$×○○，×○×，××○$\}$ は，A がはずれのくじを引く事象であるから

${}^{\text{コ，サ，シ}}$⓪，③，⑤

$E_3=\{$ ○○×，○×○，○××，×○○，××○ $\}$ より　　$P(E_3)=\frac{n(E_3)}{n(U)}=\frac{{}^{\text{ソ}}5}{{}^{\text{タ}}6}$

(5)　$E_1\cap E=E_2\cap E=E_3\cap E=E$ から　　$n(E_1\cap E)=n(E_2\cap E)=n(E_3\cap E)=3$

これと $p_1=\frac{n(E_1\cap E)}{n(E_1)}$，$p_2=\frac{n(E_2\cap E)}{n(E_2)}$，$p_3=\frac{n(E_3\cap E)}{n(E_3)}$ から　　$p_1=p_2=p_3=\frac{3}{5}$

したがって　　${}^{\text{チ}}$⑥