数学Ⅰ・A　第１問〔3〕

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x^2-2(3a^2+5a)x+18a^4+30a^3+49a^2+16 \\
&= \{x-(3a^2+5a)\}^2-(3a^2+5a)^2+18a^4+30a^3+49a^2+16 \\
&= \{x-(3a^2+5a)\}^2-(9a^4+30a^3+25a^2)+18a^4+30a^3+49a^2+16 \\
&= \{x-(3a^2+5a)\}^2+9a^4+24a^2+16
\end{aligned}
$$

よって，2 次関数 $y=g(x)$ のグラフの頂点は

$$\left({}^{\text{セ}}3a^2+{}^{\text{ソ}}5a,\ {}^{\text{タ}}9a^4+{}^{\text{チツ}}24a^2+{}^{\text{テト}}16\right)$$

この頂点の x 座標について　$3a^2+5a=3\left\{\left(a+\dfrac{5}{6}\right)^2-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2\right\}$

$$=3\left(a+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{12}$$

ゆえに，頂点の x 座標は $a=-\dfrac{5}{6}$ で最小値 $-\dfrac{{}^{\text{ナニ}}25}{{}^{\text{ヌネ}}12}$ をとる。

また，$t=a^2$ とおくと，頂点の y 座標について

$$
\begin{aligned}
9a^4+24a^2+16 &= 9t^2+24t+16 \\
&= 9\left\{\left(t+\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}+16 \\
&= 9\left(t+\frac{4}{3}\right)^2
\end{aligned}
$$

t の変域は $t\geqq 0$ であるから，頂点の y 座標は $t=0$ で最小値 ${}^{\text{ノハ}}16$ をとる。