数学Ⅱ・B　第 5 問

(1)　$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，点 A の移動は次の 3 通り。

(i)　負の向きに 2 回移動する

このとき，$X=-1-1={}^{ア}-2$ で　$P(X=-2)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{{}^{エ}4}{{}^{オ}9}$

(ii)　正の向きと負の向きに 1 回ずつ移動する

このとき，$X=3-1={}^{イ}2$ で　$P(X=2)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^1=\frac{{}^{カ}4}{9}$

(iii)　正の向きに 2 回移動する

このとき，$X=3+3={}^{ウ}6$ で　$P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{{}^{キ}1}{9}$

(2)　n 回移動して，正の向きに移動した回数が Y であるから

$$X=3Y+(-1)\cdot(n-Y)={}^{ク}-n+{}^{ケ}4Y$$

また，1 回ごとの移動は独立であるから，確率変数 Y は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う。
ゆえに，Y の平均と分散は

$$E(Y)=np\quad\left({}^{コ}\ ⓪\right)$$

$$V(Y)=np(1-p)\quad\left({}^{サ}\ ①\right)$$

よって，X の平均と分散は

$$E(X)=E(-n+4Y)=4E(Y)-n=4np-n\quad\left({}^{シ}\ ⑨\right)$$

$$V(X)=V(-n+4Y)=4^2V(Y)=16np(1-p)\quad\left({}^{ス}\ ⑧\right)$$

(3)　(2) の結果に $p=\frac{1}{4}$，$n=1200$ を代入すると，

Y の平均は　$1200\cdot\frac{1}{4}={}^{セソタ}300$

Y の標準偏差は　$\sqrt{1200\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{1200\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}={}^{チツ}15$

このとき，$X=-1200+4Y$ であるから，$X\geqq 120$ に代入すると

$$-1200+4Y\geqq 120$$

ゆえに　　$Y\geqq 330$

よって　　$\frac{Y-300}{15}\geqq\frac{330-300}{15}=2.00$

ゆえに　　$P(X\geqq 120)=P\left(\frac{Y-300}{15}\geqq{}^{テ}2.{}^{トナ}00\right)$

ここで，$n=1200$ は十分に大きいので，確率変数 $\frac{Y-300}{15}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，求める確率の近似値は正規分布表から

$$P\left(\frac{Y-300}{15} \geqq 2.00\right)=P(Z \geqq 2.00)=0.5-0.4772=0.0228$$

したがって　$0.^{\text{ニヌネ}}023$

(4)　2400 回移動した後の点 A の座標が $X=1440$ であるから，(2) より

$$1440=-2400+4y$$

ゆえに　$y=960$

したがって，標本比率 r は　$r=\dfrac{960}{2400}=0.4$

ゆえに，求める信頼区間は

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}} \leqq p \leqq 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}$$

ここで　$1.96\sqrt{\dfrac{0.4\cdot(1-0.4)}{2400}}=1.96\cdot 0.01=0.0196$

であるから

$$0.4-0.0196 \leqq p \leqq 0.4+0.0196$$

$$0.3804 \leqq p \leqq 0.4196$$

ゆえに　$0.^{\text{ノハヒ}}380 \leqq p \leqq 0.^{\text{フヘホ}}420$

参考　n が十分に大きいならば，確率変数 R は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$ に従うことから

$$W=\frac{R-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表から

$$P(|W| \leqq 1.96)=2P(0 \leqq W \leqq 1.96)=2\cdot 0.4750=0.95$$

ゆえに，p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$r-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leqq p \leqq r+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$n=2400$ が十分に大きいので大数の法則から，求める信頼区間は

$$r-1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}} \leqq p \leqq r+1.96\sqrt{\frac{r(1-r)}{n}}$$