

数学Ⅱ・B 第3問

(1) k を 2 以上の自然数とすると、この数列には分母が k である分数は $k-1$ 個含まれる。

$$1+2+3+4+5=15$$

であるから、 a_{15} は分母が $5+1=6$ である分数のうち分子が最大のものである。

$$\text{よって } a_{15} = \frac{\overset{\text{ア}}{5}}{\underset{\text{イ}}{6}}$$

分母が 7 以下の項は

$$\sum_{l=2}^7 (l-1) = \sum_{l=1}^6 l = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6+1) = 21 \text{ (個)}$$

であるから、分母に初めて 8 が現れる項は $a_{\text{ウ} \pm 22}$

(2) (1)と同様に考えると、 k が 3 以上のとき、分母が $k-1$ 以下の項の個数は

$\sum_{l=2}^{k-1} (l-1)$ であるから

$$\begin{aligned} M_k &= \sum_{l=2}^{k-1} (l-1) + 1 = \sum_{l=1}^{k-2} l + 1 = \frac{1}{2}(k-2)\{(k-2)+1\} + 1 \\ &= \frac{\overset{\text{オ}}{1}}{\underset{\text{カ}}{2}}k^2 - \frac{\overset{\text{キ}}{3}}{\underset{\text{ク}}{2}}k + \overset{\text{ケ}}{2} \end{aligned}$$

$$N_k = M_k + \{(k-1)-1\} = \frac{\overset{\text{コ}}{1}}{\underset{\text{サ}}{2}}k^2 - \frac{\overset{\text{シ}}{1}}{\underset{\text{ス}}{2}}k$$

これらは $k=2$ のときも成り立つ。

ここで、 $N_{14} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (14-1) = 91$ 、 $N_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (15-1) = 105$ であるから $a_{105} = \frac{14}{15}$

$$\text{よって } a_{104} = \frac{\overset{\text{セ}}{13}}{\underset{\text{タチ}}{15}}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の第 M_k 項から第 N_k 項はすべて分母が k の分数であるから、その和は

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{k} = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k-1} l = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2}(k-1)\{(k-1)+1\} = \frac{\overset{\text{ツ}}{1}}{\underset{\text{テ}}{2}}k - \frac{\overset{\text{ト}}{1}}{\underset{\text{ナ}}{2}}$$

であるから、この数列の初項から第 N_k 項までの和 S_k は

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{l=2}^k \left(\frac{1}{2}l - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{l=2}^k (l-1) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k-1} l \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(k-1)\{(k-1)+1\} = \frac{\overset{\text{ニ}}{1}}{\underset{\text{ヌ}}{4}}k^2 - \frac{\overset{\text{ネ}}{1}}{\underset{\text{フ}}{4}}k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \sum_{n=1}^{103} a_n &= \sum_{n=1}^{105} a_n - (a_{104} + a_{105}) = S_{15} - \left(\frac{13}{15} + \frac{14}{15} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 15 \cdot (15-1) - \frac{27}{15} = \frac{105}{2} - \frac{27}{15} = \frac{\overset{\text{ハ}}{507}}{\underset{\text{ヘ}}{10}} \end{aligned}$$