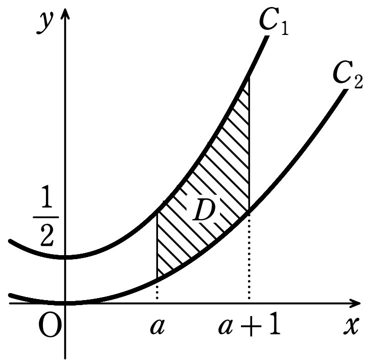
数学Ⅱ・B　第２問

(1)　$\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}>0$



よって，すべての実数 x について　　$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}>\frac{1}{4}x^2$

ゆえに　　$S=\int_a^{a+1}\left(\frac{1}{{}^{\text{ア}}4}x^2+\frac{1}{{}^{\text{イ}}2}\right)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{12}+\frac{x}{2}\right]_a^{a+1}$$

$$=\frac{a^2}{{}^{\text{ウ}}4}+\frac{a}{{}^{\text{エ}}4}+\frac{{}^{\text{オ}}7}{{}^{\text{カキ}}12}$$

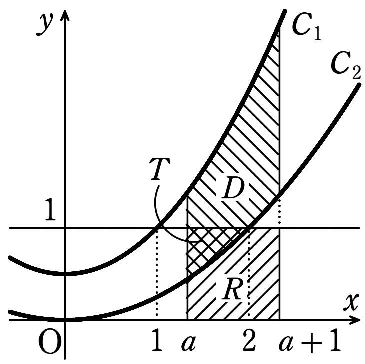
$$=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{25}{48}$$

よって，S は $a=\frac{{}^{\text{クケ}}-1}{{}^{\text{コ}}2}$ で最小値 $\frac{{}^{\text{サシ}}25}{{}^{\text{スセ}}48}$ をとる。

(2)　$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}=1$ を解いて　　$x=\pm 1$

よって，C_1 と $y=1$ との交点の座標は　　$(\pm{}^{\text{ソ}}1,\ 1)$

また，$\frac{1}{4}x^2=1$ を解いて　　$x=\pm 2$



よって，C_2 と $y=1$ との交点の座標は　　$(\pm{}^{\text{タ}}2,\ 1)$

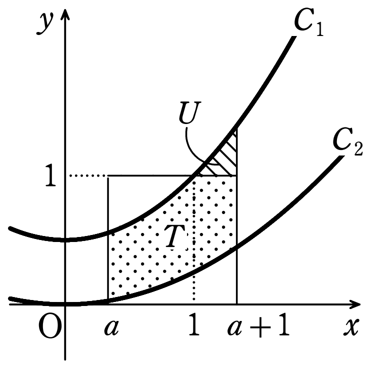
したがって，$a>2$ のとき，R は C_2 と x 軸の間にあるから，D と R は共通部分をもたない。

$a\geqq 0$ であるから，求める a の範囲は　　$0\leqq a\leqq{}^{\text{チ}}2$

$1\leqq a\leqq 2$ のとき，R は C_1 と x 軸の間にあるから，共通部分は右の図のようになる。

図より，a が増加するとき，共通部分は小さくなるから，T は減少する。(${}^{\text{ツ}}$ ①)

$0\leqq a\leqq 1$ のとき，D のうち R の外側にある部分の面積 U は，右の図より



$$U=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}-1\right)dx=\int_1^{a+1}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x}{2}\right]_1^{a+1}=\frac{a^3}{{}^{\text{テ}}6}+\frac{a^2}{{}^{\text{ト}}2}$$

したがって，$0\leqq a\leqq 1$ において

$$T=S-U=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{4}+\frac{7}{12}-\left(\frac{a^3}{6}+\frac{a^2}{2}\right)$$

$$=-\frac{a^3}{{}^{\text{ナ}}6}-\frac{a^2}{{}^{\text{ニ}}4}+\frac{a}{{}^{\text{ヌ}}4}+\frac{7}{12}$$

ゆえに　　$T'=-\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{4}$

$T'=0$ とすると　　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

よって，$0\leqq a\leqq 1$ における T の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
T'		$+$	0	$-$	
T		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって，T は $a=\dfrac{{}^{\text{ネノ}}-1+\sqrt{{}^{\text{ハ}}3}}{{}^{\text{ヒ}}2}$ で最大値をとる。