数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

(1)　① の両辺に $\sin^2 x\cos^2 x$ を掛けると

$$\sin^2 x\cos^2 x\left\{\cos^2 x-\sin^2 x+k\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\right\}=0$$

$$\sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x-\sin^2 x)+k(\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin x\cos x\right)^2(\cos^2 x-\sin^2 x)-k(\cos^2 x-\sin^2 x)=0$$

$$\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2\cos 2x-k\cos 2x=0$$

$$\left(\frac{\sin^2 2x}{{}^{\text{チ}}4}-k\right)\cos 2x=0 \quad \cdots\cdots ②$$

よって　$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k=0$　または　$\cos 2x=0$

$0<2x<\pi$ であるから，$\cos 2x=0$ より　$2x=\dfrac{\pi}{2}$　　よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$　…… ③

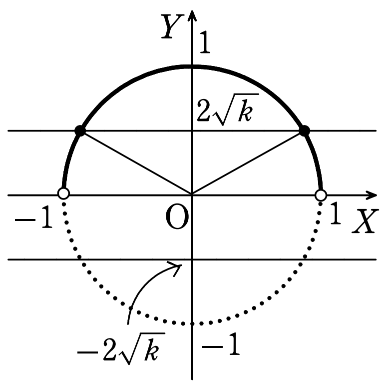
したがって，k の値に関係なく，$x=\dfrac{\pi}{{}^{\text{ツ}}4}$ のとき常に ① が成り立つ。

また，$0<2x<\pi$ であるから　$0<\sin^2 2x\leqq 1$

$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k=0$ から　$\sin^2 2x=4k$

$k>0$ より　$\sin 2x=\pm 2\sqrt{k}$

$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-k=0$ を満たす x は，右の図から



$2\sqrt{k}>1$ すなわち $k>\dfrac{1}{4}$ のとき　ない

$2\sqrt{k}=1$ すなわち $k=\dfrac{1}{4}$ のとき　$\sin 2x=1$

よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$

$2\sqrt{k}<1$ すなわち $0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{4}$ 以外の 2 個

③ と合わせると，① を満たす x の個数は

$k>\dfrac{{}^{\text{テ}}1}{{}^{\text{ト}}4}$ のとき　1 個　　$0<k<\dfrac{1}{4}$ のとき　${}^{\text{ナ}}3$ 個　　$k=\dfrac{1}{4}$ のとき　${}^{\text{ニ}}1$ 個

(2)　$k=\dfrac{4}{25}$ とすると，② より　$\left(\dfrac{\sin^2 2x}{4}-\dfrac{4}{25}\right)\cos 2x=0$

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ であるから　$\cos 2x\neq 0$

よって　$\dfrac{\sin^2 2x}{4}-\dfrac{4}{25}=0$　　ゆえに　$\sin^2 2x=\dfrac{16}{25}$

$\dfrac{\pi}{2}<2x<\pi$ より，$\sin 2x>0$ であるから　$\sin 2x=\dfrac{{}^{\text{ヌ}}4}{{}^{\text{ネ}}5}$

$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x$ より　　$\cos^2 2x = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

$\dfrac{\pi}{2} < 2x < \pi$ より，$\cos 2x < 0$ であるから　　$\cos 2x = \dfrac{{}^{ノハ}-3}{{}^{ヒ}5}$

よって　　$2\cos^2 x - 1 = -\dfrac{3}{5}$　　　　ゆえに　$\cos^2 x = \dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos x > 0$ であるから　　$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{{}^{フ}5}}{{}^{ヘ}5}$