

数学 I・A 第 5 問

DA = DC より $\angle DAC = \angle DCA$ …… ①

円周角の定理により $\angle DAC = \angle DBC$ …… ②

円周角の定理により $\angle DCA = \angle ABD$ …… ③

①, ③ より $\angle DAC = \angle ABD$ (ア ①) …… ④

②, ④ より $\angle ABD = \angle DBC$ …… ⑤

よって, 線分 BD は $\angle ABC$ の二等分線であるから $AE : EC = AB : BC = 2 : 1$

すなわち $\frac{EC}{AE} = \frac{1}{2}$

$\triangle ACD$ と直線 FE について, メネラウスの定理により $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{DG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$

すなわち $\frac{2}{3} \cdot \frac{DG}{GC} \cdot \frac{1}{2} = 1$ よって $\frac{GC}{DG} = \frac{1}{3}$

(1) チェバの定理により $\frac{AB}{BG} \cdot \frac{GC}{CD} \cdot \frac{DF}{FA} = 1$

すなわち $\frac{4}{BG} \cdot \frac{1}{3-1} \cdot \frac{3}{2} = 1$

よって $BG = 3$

また, 方べきの定理により $GA \cdot GB = GD \cdot GC$

$GD = 3GC$ であるから $(4+3) \cdot 3 = 3GC \cdot GC$

すなわち $GC^2 = 7$

$GC > 0$ であるから $GC = \sqrt{7}$

$DC = 2GC$ であるから $DC = 2\sqrt{7}$

(2) 四角形 ABCD の外接円の直径が最小となるのは, 辺 AB が直径となる場合である。

よって, 外接円の直径は 4

ゆえに, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB : BC = 2 : 1$ であるから, $\triangle ABC$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形である。

よって $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$

⑤ より $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$

③ より $\angle DCA = \angle ABD = 30^\circ$

したがって, $\angle BAC = \angle DCA$ であり, 錯角が等しいから $AB \parallel DC$

ゆえに $AB : DC = AE : EC$ すなわち $4 : DC = 2 : 1$

よって $DC = 2$

$\frac{GC}{DG} = \frac{1}{3}$ であるから $GC = 1$

$AB \parallel DC$ であるから $AH : GC = AE : EC$ すなわち $AH : 1 = 2 : 1$

よって $AH = 2$

