数学Ⅰ・A 第2問〔3〕

(1) 各都市のヒストグラムから，最低気温を読み取ると

東京は　0℃～5℃

N市は　−10℃～−5℃

M市は　5℃～10℃

よって，都市名と箱ひげ図の組み合わせは

東京―c，N市―b，M市―a　（ソ ⑤）

(2) ⓪，①，② 散布図から，東京とN市の最高気温の間には正の相関があり，東京とM市の最高気温の間には負の相関があることが読み取れる。

③，④ 散布図から，東京とO市の散布図の点の方が，東京とN市の散布図の点より，右上がりの直線に沿って分布する傾向が強いことが読み取れる。

すなわち，東京とO市の最高気温の間の相関の方が，東京とN市の最高気温の間の相関より強いことが読み取れる。

よって　タ ①，チ ③　（または　タ ③，チ ①）

(3) N市の摂氏での最高気温のデータを x_{N_1}，x_{N_2}，……，$x_{\mathrm{N}_{365}}$，華氏での最高気温のデータを y_{N_1}，y_{N_2}，……，$y_{\mathrm{N}_{365}}$ で表す。

x_{N} と y_{N} の間には　$y_{\mathrm{N}}=\dfrac{9}{5}x_{\mathrm{N}}+32$ ……①　の関係がある。

このとき，x_{N}，y_{N} の分散を X，Y で表すと　$Y=\left(\dfrac{9}{5}\right)^2X$　……②

よって　$\dfrac{Y}{X}=\dfrac{81}{25}$　（ツ ⑨）

東京(摂氏)の最高気温のデータを x_{T_1}，x_{T_2}，……，$x_{\mathrm{T}_{365}}$，平均値を $\overline{x_{\mathrm{T}}}$，N市の摂氏での平均値を $\overline{x_{\mathrm{N}}}$，華氏での平均値を $\overline{y_{\mathrm{N}}}$ と表す。

ここで，①の関係から　$\overline{y_{\mathrm{N}}}=\dfrac{9}{5}\overline{x_{\mathrm{N}}}+32$　……③

共分散の定義から

$$\begin{aligned}
W&=\frac{1}{365}\Big\{\left(x_{\mathrm{T}_1}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\left(y_{\mathrm{N}_1}-\overline{y_{\mathrm{N}}}\right)+\left(x_{\mathrm{T}_2}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\left(y_{\mathrm{N}_2}-\overline{y_{\mathrm{N}}}\right)\\
&\qquad\qquad+\cdots\cdots+\left(x_{\mathrm{T}_{365}}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\left(y_{\mathrm{N}_{365}}-\overline{y_{\mathrm{N}}}\right)\Big\}\\
&=\frac{1}{365}\Big\{\left(x_{\mathrm{T}_1}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\cdot\frac{9}{5}\left(x_{\mathrm{N}_1}-\overline{x_{\mathrm{N}}}\right)+\left(x_{\mathrm{T}_2}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\cdot\frac{9}{5}\left(x_{\mathrm{N}_2}-\overline{x_{\mathrm{N}}}\right)\\
&\qquad\qquad+\cdots\cdots+\left(x_{\mathrm{T}_{365}}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\cdot\frac{9}{5}\left(x_{\mathrm{N}_{365}}-\overline{x_{\mathrm{N}}}\right)\Big\}\\
&=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{365}\Big\{\left(x_{\mathrm{T}_1}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\left(x_{\mathrm{N}_1}-\overline{x_{\mathrm{N}}}\right)+\left(x_{\mathrm{T}_2}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\left(x_{\mathrm{N}_2}-\overline{x_{\mathrm{N}}}\right)\\
&\qquad\qquad+\cdots\cdots+\left(x_{\mathrm{T}_{365}}-\overline{x_{\mathrm{T}}}\right)\left(x_{\mathrm{N}_{365}}-\overline{x_{\mathrm{N}}}\right)\Big\}\\
&=\frac{9}{5}Z
\end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{W}{Z}=\dfrac{9}{5}$　(テ ⑧)

東京(摂氏)の分散を $s_{\mathrm{T}}{}^2$ と表すと，相関係数の定義から

$$V=\frac{W}{\sqrt{s_{\mathrm{T}}{}^2}\sqrt{Y}}=\frac{\frac{9}{5}Z}{\sqrt{s_{\mathrm{T}}{}^2}\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^2X}}=\frac{Z}{\sqrt{s_{\mathrm{T}}{}^2}\sqrt{X}}=U$$

よって　$\dfrac{V}{U}=1$　(ト ⑦)

参考　相関係数は単位の取り方によらないから，$\dfrac{V}{U}=1$ となることは明らかである。

参考　(等式 ②，③ について)

a，b を定数とする。変量 x のデータから $y=ax+b$ によって新しい変量 y のデータが得られるとき，x，y のデータの平均値を $\overline{x}$，$\overline{y}$，分散 $s_x{}^2$，$s_y{}^2$，標準偏差を s_x，s_y とすると，次のことが成り立つ。

$$\overline{y}=a\overline{x}+b,\quad s_y{}^2=a^2s_x{}^2,\quad s_y=|a|s_x$$

証明　変量 x についてのデータを x_1，x_2，……，x_n とする。

変量 y のデータの平均値 $\overline{y}$ は

$$\overline{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n)=\frac{1}{n}\{(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots\cdots+(ax_n+b)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{a(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+nb\}=a\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+b$$

よって　$\overline{y}=a\overline{x}+b$

また，$y_k-\overline{y}=ax_k+b-(a\overline{x}+b)=a(x_k-\overline{x})$ であることから，変量 y のデータの分散 $s_y{}^2$ は

$$s_y{}^2=\frac{1}{n}\{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots\cdots+(y_n-\overline{y})^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\{a^2(x_1-\overline{x})^2+a^2(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+a^2(x_n-\overline{x})^2\}$$

$$=a^2\cdot\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

よって　$s_y{}^2=a^2s_x{}^2$

これより，変量 y のデータの標準偏差は　$s_y=|a|s_x$　終