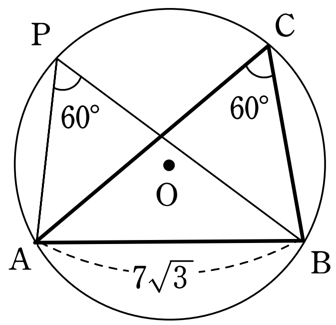
数学Ⅰ・A 第 2 問〔1〕

△ABC の外接円 O の半径を R とすると，正弦定理により

$2R=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$　　よって　$R=\dfrac{7\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}={}^{\text{ア}}7$



(1)　2PA＝3PB より　$\mathrm{PA}=3x$，$\mathrm{PB}=2x$　とおける。

円周角の定理から　　$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{ACB}=60^\circ$

△ABP において余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos\angle\mathrm{APB}$$

すなわち　　$(7\sqrt{3})^2=(3x)^2+(2x)^2-2\cdot 3x\cdot 2x\cos 60^\circ$

よって　　$7x^2=49\cdot 3$　　　ゆえに　$x^2=21$

$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{21}$　　　したがって　$\mathrm{PA}=3x={}^{\text{イ}}3\sqrt{{}^{\text{ウエ}}21}$

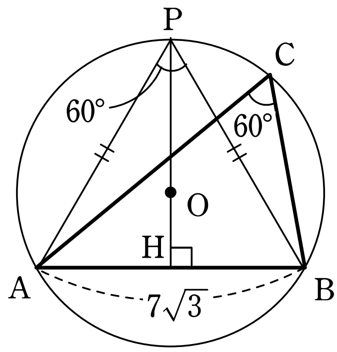
(2)　点 P から辺 AB に下ろした垂線を PH とする。

△PAB の底辺を辺 AB とみたとき，高さは PH である。

△PAB の面積が最大となるとき，PH の長さは最大となる。

このとき，右の図から，PA＝PB である。

$\angle\mathrm{APB}=60^\circ$ であるから，△PAB の面積が最大となるとき，△PAB は正三角形となる。



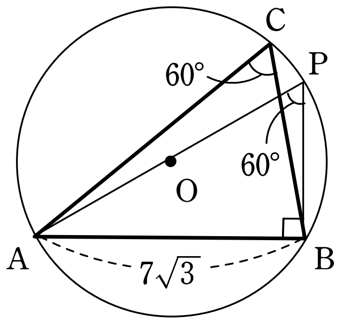
よって　　$\mathrm{PA}=\mathrm{AB}={}^{\text{オ}}7\sqrt{{}^{\text{カ}}3}$

(3)　$0^\circ<\angle\mathrm{PBA}<120^\circ$ であるから　　$0<\sin\angle\mathrm{PBA}\leqq 1$

よって，$\sin\angle\mathrm{PBA}$ の最大値は 1 であり，このとき $\angle\mathrm{PBA}=90^\circ$ である。

ゆえに，$\sin\angle\mathrm{PBA}$ の値が最大となるとき，線分 PA は △ABC の外接円 O の直径と一致するから

$$\mathrm{PA}=2R={}^{\text{キク}}14$$



このとき　　$\mathrm{PB}=\dfrac{\mathrm{PA}}{2}=7$

よって，△PAB の面積は　　$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PB}=\dfrac{1}{2}\cdot 7\sqrt{3}\cdot 7=\dfrac{{}^{\text{ケコ}}49\sqrt{{}^{\text{サ}}3}}{{}^{\text{シ}}2}$