数学Ⅱ･B 第 5 問

(1) 白球 4 個，赤球 3 個が入っている袋から球を3 個取り出す方法は　　${}_7\mathrm{C}_3 = 35$ (通り)

確率変数 W のとり得る値は 0，1，2，3 である。

$$P(W=0) = \frac{{}_3\mathrm{C}_3}{35} = \frac{{}^{ア}1}{{}^{イウ}35}$$

$$P(W=1) = \frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2}{35} = \frac{4\times 3}{35} = \frac{{}^{エオ}12}{35}$$

$$P(W=2) = \frac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1}{35} = \frac{6\times 3}{35} = \frac{{}^{カキ}18}{35}$$

$$P(W=3) = \frac{{}_4\mathrm{C}_3}{35} = \frac{{}^{ク}4}{35}$$

ゆえに，W の期待値 (平均) $E(W)$ は

W	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$E(W) = 0\cdot\frac{1}{35} + 1\cdot\frac{12}{35} + 2\cdot\frac{18}{35} + 3\cdot\frac{4}{35}$$

$$= \frac{60}{35} = \frac{{}^{ケコ}12}{{}^{サ}7}$$

また　　$E(W^2) = 0^2\cdot\frac{1}{35} + 1^2\cdot\frac{12}{35} + 2^2\cdot\frac{18}{35} + 3^2\cdot\frac{4}{35}$

$$= \frac{120}{35} = \frac{24}{7}$$

よって，W の分散 $V(W)$ は

$$V(W) = E(W^2) - \{E(W)\}^2 = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{{}^{シス}24}{{}^{セソ}49}$$

(2) 確率変数 Z が標準正規分布に従うから，t を実数の定数とすると

$$P(-t \leqq Z \leqq t) = 2P(0 \leqq Z \leqq t)$$

が成り立つ。

$P(-t \leqq Z \leqq t) = 0.99$ が成り立つとき　　$2P(0 \leqq Z \leqq t) = 0.99$

ゆえに　　$P(0 \leqq Z \leqq t) = 0.495$

正規分布表から 0.495 に最も近い値で選択肢にある値を探すと　　$t = 2.58$　(^{タ}③)

(3) 母標準偏差 σ の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\overline{X}$ とする。

この標本から得られる母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間は

$$\overline{X} - 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　　$L_1 = \overline{X} + 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\overline{X} - 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\cdot 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

また，この標本から得られる母平均 m の信頼度 99 % の信頼区間は，(2) より

$$\overline{X} - 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

よって　　$L_2 = \overline{X} + 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\overline{X} - 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\cdot 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

これらから　　$\dfrac{L_2}{L_1}=\dfrac{2\cdot 2.58\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot 1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{2.58}{1.96}=1.31\cdots\cdots$

よって　　$\dfrac{L_2}{L_1}={}^{チ}1.{}^{ツ}3$

また，同じ母集団から抽出した大きさ $4n$ の無作為標本の標本平均を $\overline{Y}$ とする。
この標本から得られる母平均 m の信頼度 95 % の信頼区間は

$$\overline{Y}-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}\leqq m\leqq\overline{Y}+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}$$

よって　　$L_3=\overline{Y}+1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}}-\left(\overline{Y}-1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{4n}}\right)$

$$=2\cdot 1.96\cdot\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ゆえに　　$\dfrac{L_3}{L_1}=\dfrac{1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}{2\cdot 1.96\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\dfrac{1}{2}={}^{テ}0.{}^{ト}5$