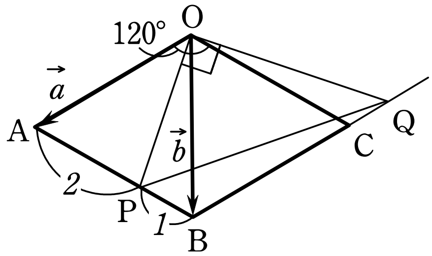
数学Ⅱ･B　第 4 問

(1)　点 P は辺 AB を 2 : 1 に内分するから



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\frac{{}^{\text{ア}}1}{{}^{\text{イ}}3}\vec{a}+\frac{{}^{\text{ウ}}2}{3}\vec{b}$$

ひし形の向かい合う辺は平行で長さが等しいから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{b}-\vec{a}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$=(1-t)\vec{b}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right)={}^{\text{エ}}-t\vec{a}+\vec{b}$$

OA＝AB，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ であるから，三角形 OAB は正三角形である。

すなわち　$\mathrm{OB}=|\vec{b}|=1$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}=1\times1\times\cos60^\circ=\frac{{}^{\text{オ}}1}{{}^{\text{カ}}2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}={}^{\text{キ}}0$

また　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-t\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{t}{3}|\vec{a}|^2+\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2}{3}t\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}|\vec{b}|^2$

$$=-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}t\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}t+\frac{5}{6}$$

ゆえに　$-\frac{2}{3}t+\frac{5}{6}=0$　　　よって　$t=\frac{{}^{\text{ク}}5}{{}^{\text{ケ}}4}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}=\frac{7}{9}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\geqq0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{\sqrt{{}^{\text{コ}}7}}{{}^{\text{サ}}3}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\left|-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\frac{25}{16}|\vec{a}|^2-\frac{5}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

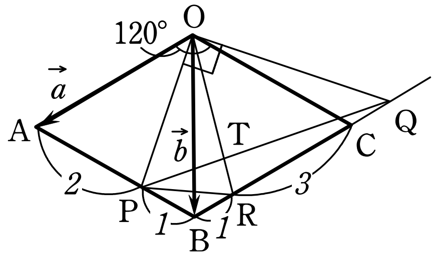
$$=\frac{25}{16}-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}+1=\frac{21}{16}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\geqq0$ であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\frac{\sqrt{{}^{\text{シス}}21}}{{}^{\text{セ}}4}$

三角形 OPQ は $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ の直角三角形であるから，その面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{4}=\frac{{}^{\text{ソ}}7\sqrt{{}^{\text{タ}}3}}{{}^{\text{チツ}}24}$$

(2)　点 R は辺 BC を 1 : 3 に内分するから



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{r}{4}\vec{a}+r\vec{b}\quad\cdots\cdots ①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(1-s)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)+s\left(-\frac{5}{4}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{1}{12}(4-19s)\vec{a}+\frac{1}{3}(2+s)\vec{b}\quad\cdots\cdots ②$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから，①，② より　　$-\dfrac{r}{4}=\dfrac{1}{12}(4-19s)$，$r=\dfrac{1}{3}(2+s)$

これを解くと　　$r=\dfrac{{}^{\text{テ}}7}{{}^{\text{ト}}9}$，$s=\dfrac{{}^{\text{ナ}}1}{{}^{\text{ニ}}3}$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{{}^{\text{ヌネ}}-7}{{}^{\text{ノハ}}36}\vec{a}+\dfrac{{}^{\text{ヒ}}7}{{}^{\text{フ}}9}\vec{b}$

$r=\dfrac{7}{9}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$　　　ゆえに　　OT : TR＝7 : 2

$s=\dfrac{1}{3}$ より　　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　　　ゆえに　　PT : TQ＝1 : 2

三角形 PRT，三角形 OPT の面積をそれぞれ S_2，S_3 とする。

PQ : PT＝3 : 1 より　　$S_1 : S_3=3 : 1$

OT : TR＝7 : 2 より　　$S_3 : S_2=7 : 2$

よって　　$S_2=\dfrac{2}{7}S_3=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{3}S_1=\dfrac{2}{21}S_1$

ゆえに　　$S_1 : S_2={}^{\text{ヘホ}}21 : 2$