数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　$2^1=2$,　$2^2=2\cdot 2=4$,　$2^3=4\cdot 2=8$,　$2^4=8\cdot 2=16$,

$2^5=16\cdot 2=32$,　$2^6=32\cdot 2=64$, ……

よって　$a_1=2$, $a_2={}^{ア}4$, $a_3={}^{イ}8$, $a_4={}^{ウ}6$, $a_5={}^{エ}2$

また，一の位の数は 2，4，8，6 の 4 つの数字の繰り返しとなるから，すべての自然数 n に対して，$a_{n+4}=a_n$ が成り立つ。(^{オ} ③)

注意　問題全体で考えれば ③ が適切な解答である。しかし，(1) を独立の問題と考えたときは，$a_{5n}=a_n$ も当てはまるため，⓪ も正解である。

(2)　① を繰り返し用いると

$$b_{n+4}=\frac{a_{n+3}b_{n+3}}{4}=\frac{a_{n+3}}{4}\cdot\frac{a_{n+2}b_{n+2}}{4}=\frac{a_{n+3}a_{n+2}}{4^2}\cdot\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{4}$$

$$=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}}{4^3}\cdot\frac{a_nb_n}{4}=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{4^4}b_n$$

$$=\frac{a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n}{2^{{}^{カ}8}}b_n$$

a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3} は数列 $\{a_n\}$ の連続する 4 つの項であるから

$$a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n=2\cdot 4\cdot 8\cdot 6=3\cdot 2^{{}^{キ}7}$$

ゆえに　$b_{n+4}=\dfrac{3\cdot 2^7}{2^8}b_n=\dfrac{{}^{ク}3}{{}^{ケ}2}b_n$

これより，k を自然数とすると

$$b_{4k-3}=\frac{3}{2}b_{4k-7}=\frac{3}{2}b_{4(k-1)-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^2b_{4(k-1)-7}=\left(\frac{3}{2}\right)^2b_{4(k-2)-3}$$

$$=\cdots\cdots=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_{4\{k-(k-1)\}-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}b_1=\left(\frac{{}^{コ}3}{{}^{サ}2}\right)^{k-1}$$

① より　$b_{4k-2}=\dfrac{a_{4k-3}b_{4k-3}}{4}$

ここで，$a_{4k-3}=a_1=2$ であるから　$b_{4k-2}=\dfrac{1}{4}\cdot 2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{{}^{シ}1}{{}^{ス}2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

① より　$b_{4k-1}=\dfrac{a_{4k-2}b_{4k-2}}{4}$

ここで，$a_{4k-2}=a_2=4$ であるから　$b_{4k-1}=\dfrac{1}{4}\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{{}^{セ}1}{{}^{ソ}2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

① より　$b_{4k}=\dfrac{a_{4k-1}b_{4k-1}}{4}$

ここで，$a_{4k-1}=a_3=8$ であるから　$b_{4k}=\dfrac{1}{4}\cdot 8\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k-1}$

(3)　(2) から

$$S_{4m}=\sum_{j=1}^{4m}b_j$$

$$=(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+\cdots\cdots+(b_{4m-3}+b_{4m-2}+b_{4m-1}+b_{4m})$$

$$=\sum_{j=1}^{m}(b_{4j-3}+b_{4j-2}+b_{4j-1}+b_{4j})$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}+\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}\right\}$$

$$=3\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{3}{2}\right)^{j-1}=3\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1}{\frac{3}{2}-1}=6\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-1\right\}={}^{タ}6\left(\frac{3}{2}\right)^{m}-{}^{チ}6$$

(4)　(2) から　　$b_{4k-3}b_{4k-2}b_{4k-1}b_{4k}=\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

$$=\frac{1}{{}^{ツ}4}\left(\frac{3}{2}\right)^{{}^{テ}4(k-1)}$$

よって，求める積 T_{4m} は

$$T_{4m}=(b_1b_2b_3b_4)\cdot(b_5b_6b_7b_8)\cdot(b_9b_{10}b_{11}b_{12})\cdot\cdots\cdots\cdot(b_{4m-3}b_{4m-2}b_{4m-1}b_{4m})$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(1-1)}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(2-1)}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(3-1)}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4(m-1)}$$

$$=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{4\cdot1+4\cdot2+\cdots\cdots+4(m-1)}$$

ここで，$\frac{3}{2}$ の指数部分は

$$4\cdot1+4\cdot2+\cdots\cdots+4(m-1)=\sum_{i=1}^{m-1}4i=4\cdot\frac{1}{2}(m-1)m=2m^2-2m$$

よって　　$T_{4m}=\frac{1}{4^m}\left(\frac{3}{2}\right)^{{}^{ト}2m^2-{}^{ナ}2m}$

また　　$T_{10}=T_8\cdot b_9b_{10}=\frac{1}{4^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2\cdot2^2-2\cdot2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{3-1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3-1}$

$$=\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3^{{}^{ニ}8}}{2^{{}^{ヌネ}13}}$$