数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　h が 0 でないとき，x が a から $a+h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2}(a+h)^2-\frac{1}{2}a^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2h}(2ah+h^2)={}^{\text{ア}}a+\frac{h}{{}^{\text{イ}}2}$$

したがって，求める微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to{}^{\text{ウ}}0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left(a+\frac{h}{2}\right)={}^{\text{エ}}a$$

(2)　放物線 C 上の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2\right)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$y-\frac{1}{2}a^2=f'(a)(x-a)$$

(1) より，$f'(a)=a$ であるから　　$y-\dfrac{1}{2}a^2=a(x-a)$

よって　　$y={}^{\text{オ}}ax-\dfrac{1}{{}^{\text{カ}}2}a^2$

$y=0$ とすると，$0=ax-\dfrac{1}{2}a^2$ より　　$ax=\dfrac{1}{2}a^2$

$a\neq0$ であるから　　$x=\dfrac{a}{2}$

したがって，点 Q の座標は　　$\left(\dfrac{{}^{\text{キ}}a}{{}^{\text{ク}}2},\ 0\right)$

点 Q を通り ℓ に垂直な直線 m の傾きを k とすると　　$k\cdot a=-1$

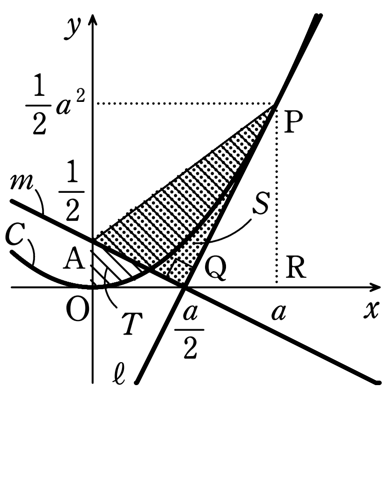
$a\neq0$ であるから　　$k=-\dfrac{1}{a}$

よって，直線 m の方程式は　　$y-0=-\dfrac{1}{a}\left(x-\dfrac{a}{2}\right)$

ゆえに　　$y=\dfrac{{}^{\text{ケコ}}-1}{{}^{\text{サ}}a}x+\dfrac{{}^{\text{シ}}1}{{}^{\text{ス}}2}$

直線 m の y 切片は $\dfrac{1}{2}$ であるから，直線 m と y 軸との交点 A の座標は　　$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

直線 ℓ と m は直交するから　　$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AQ}$



また　　$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}-a\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{2}a^2\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{a^2+a^4}{4}}=\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$\mathrm{AQ}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2+1}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}$$

よって，三角形 APQ の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{PQ}\cdot \mathrm{AQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{a^2+1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{a^2+1}}{2}=\frac{a(a^2+{}^{\text{セ}}1)}{{}^{\text{ソ}}8}$$

点 P から x 軸に垂線 PR を下ろし，台形 OAPR の面積を U とすると

$$U=(\mathrm{OA}+\mathrm{PR})\cdot \mathrm{OR}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^2\right)\cdot a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a(a^2+1)}{4}$$

y 軸と線分 AP および曲線 C によって囲まれた図形の面積 T は

$$T=U-\int_0^a\frac{1}{2}x^2dx=U-\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a(a^2+1)}{4}-\frac{a^3}{6}$$

$$=\frac{3a(a^2+1)-2a^3}{12}=\frac{a^3+3a}{12}=\frac{a(a^2+{}^{\text{タ}}3)}{{}^{\text{チツ}}12}$$

$$S-T=\frac{a(a^2+1)}{8}-\frac{a(a^2+3)}{12}=\frac{3a(a^2+1)-2a(a^2+3)}{24}$$

$$=\frac{a^3-3a}{24}=\frac{a(a^2-{}^{\text{テ}}3)}{{}^{\text{トナ}}24}$$

$a>0$ の範囲で $S-T>0$ となるための条件は　　$a^2-3>0$

これを解くと，$a>0$ であるから　　$a>\sqrt{{}^{\text{ニ}}3}$

$g(a)=a(a^2-3)$ とおくと　　$g'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$

$g'(a)=0$ とすると　　$a=\pm 1$

$a>0$ における $g(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$

よって，$g(a)$ は $a=1$ で最小値 -2 をとる。

したがって，$S-T$ は

$a={}^{\text{ヌ}}1$ で最小値 $-\dfrac{2}{24}=\dfrac{{}^{\text{ネノ}}-1}{{}^{\text{ハヒ}}12}$ をとる。

別解　(三角形 APQ の面積 S)

直線 ℓ と y 軸の交点をUとすると，U の座標は

$$\left(0,\ -\frac{1}{2}a^2\right)$$

三角形 APQ の面積 S は

$S=$(三角形 APU の面積)$-$(三角形 AQU の面積)

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}\cdot a-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}\cdot\frac{a}{2}$$

$$=\frac{a}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{a^2}{2}\right)(2-1)=\frac{a(a^2+{}^{\text{セ}}1)}{{}^{\text{ソ}}8}$$