

## 数学Ⅱ・B 第1問〔2〕

(1)  $x\sqrt{y^3} = a$  の両辺を2乗すると  $x^2y^3 = a^2$  …… ①

$\sqrt[3]{xy} = b$  の両辺を3乗すると  $xy^3 = b^3$  …… ②

$x > 0, y > 0, b > 0$  であるから、①÷②より  $x = a^2 b^{-3}$

これを②に代入すると  $(a^2 b^{-3})y^3 = b^3$

よって  $y^3 = a^{-2} b^6$

$$y = (a^{-2} b^6)^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} b^2$$

ゆえに  $p = \frac{\overset{\text{チツ}}{-2}}{\underset{\text{テ}}{3}}$

(2)  $b = 2\sqrt[3]{a^4} = 2a^{\frac{4}{3}}$  のとき

$$x = a^2 (2a^{\frac{4}{3}})^{-3} = 2^{-3} a^{\overset{\text{トナ}}{-2}}$$

$$y = a^{-\frac{2}{3}} (2a^{\frac{4}{3}})^2 = 2^2 a^{\overset{\text{ニ}}{2}}$$

よって  $x + y = 2^{-3} a^{-2} + 2^2 a^2$

$a > 0$  であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x + y = 2^{-3} a^{-2} + 2^2 a^2 \geq 2\sqrt{2^{-3} a^{-2} \cdot 2^2 a^2} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

等号が成り立つのは  $2^{-3} a^{-2} = 2^2 a^2$  すなわち  $a = 2^{-\frac{5}{4}}$  のときである。

よって、 $x + y$  の最小値は  $\sqrt{\overset{\text{ク}}{2}}$  で、このとき  $q = \frac{\overset{\text{ネノ}}{-5}}{\overset{\text{ハ}}{4}}$