数学Ⅱ・B　第 1 問〔1〕

(1)　$\mathrm{OP}=\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}=\sqrt{4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}={}^{\text{ア}}2$

$\mathrm{PQ}=\sqrt{(2\cos\theta+\cos 7\theta-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta+\sin 7\theta-2\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{\cos^2 7\theta+\sin^2 7\theta}={}^{\text{イ}}1$

$\mathrm{OQ}^2=(2\cos\theta+\cos 7\theta)^2+(2\sin\theta+\sin 7\theta)^2$

$=4\cos^2\theta+4\cos 7\theta\cos\theta+\cos^2 7\theta+4\sin^2\theta+4\sin 7\theta\sin\theta+\sin^2 7\theta$

$=4+1+4(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$

$={}^{\text{ウ}}5+{}^{\text{エ}}4(\cos 7\theta\cos\theta+\sin 7\theta\sin\theta)$

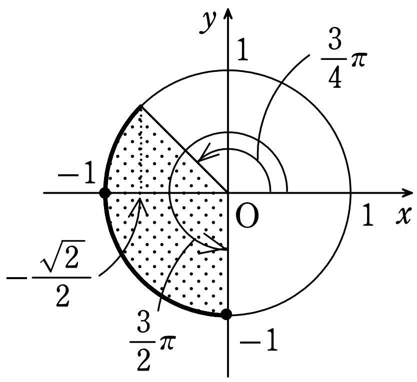
$=5+4\cos(7\theta-\theta)=5+4\cos{}^{\text{オ}}6\theta$

よって　　$\mathrm{OQ}^2=5+4\cos 6\theta$　……①

$\mathrm{OQ}\geqq 0$ であるから，OQ^2 が最大となるとき

OQ も最大となる。

$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ であるから　　$\dfrac{3}{4}\pi\leqq 6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$



ゆえに，右の図から　　$-1\leqq\cos 6\theta\leqq 0$

したがって，$6\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{カ}}4}$ のとき OQ^2 は最大値 5 をとるから，OQ の最大値は　　$\sqrt{{}^{\text{キ}}5}$

(2)　$\dfrac{\pi}{8}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より，$\cos\theta\neq 0$ であるから，直線 OP の方程式は　　$y=\dfrac{2\sin\theta}{2\cos\theta}x$

すなわち　　$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=0$　(ク ③)

3 点 O，P，Q が一直線上にあるとき，直線 OP 上に

点 Q $(2\cos\theta+\cos 7\theta,\ 2\sin\theta+\sin 7\theta)$ がある。

よって　　$\sin\theta(2\cos\theta+\cos 7\theta)-\cos\theta(2\sin\theta+\sin 7\theta)=0$

$\sin\theta\cos 7\theta-\cos\theta\sin 7\theta=0$

$\sin(7\theta-\theta)=0$

すなわち　$\sin 6\theta=0$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq 6\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$ であるから　　$6\theta=\pi$

ゆえに　　$\theta=\dfrac{\pi}{{}^{\text{ケ}}6}$

(3)　(1) から　　$\mathrm{OP}=2$，$\mathrm{PQ}=1$

さらに，$\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$ であるから　　$\mathrm{OQ}=\sqrt{{}^{コ}3}$

よって，$\mathrm{OQ}^2=3$ であるから，① より

$$5+4\cos 6\theta=3$$

ゆえに　　$\cos 6\theta=-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{3}{4}\pi \leqq 6\theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ であるから　　$6\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

したがって　　$\theta=\dfrac{{}^{サ}2}{{}^{シ}9}\pi$