# 数学Ⅰ・A 第５問

(1)　$756=2^{ア2}\cdot3^{イ3}\cdot{}^{ウ}7$

よって，$a$ の正の約数の個数は　$(2+1)(3+1)(1+1)={}^{エオ}24$ (個)

(2)　$\sqrt{am}=\sqrt{2^2\cdot3^3\cdot7\cdot m}$

$\sqrt{am}$ が自然数とすると，$am$ を素因数分解したときの指数はすべて偶数になる。

そのような最小の自然数 $m$ は　$3\times7={}^{カキ}21$

$m=21k^2$ ($k$ は自然数) とおくと　$\sqrt{am}=\sqrt{2^2\cdot3^3\cdot7\cdot21k^2}={}^{クケコ}126k$

(3)　条件から，$126k=11l+1$ ($l$ は整数) とおける。

すなわち　$126k-11l=1$

126 と 11 に，ユークリッドの互除法の計算を行うと

$$126=11\cdot11+5$$

$$11=5\cdot2+1$$

よって　$1=11-5\cdot2=11-(126-11\cdot11)\cdot2=126\cdot(-2)-11\cdot(-23)$

$126k-11l=1$ から $126\cdot(-2)-11\cdot(-23)=1$ を引くと　$126(k+2)-11(l+23)=0$

すなわち　$126(k+2)=11(l+23)$

126 と 11 は互いに素であるから，$n$ を整数として，$126k-11l=1$ の整数解は

$$k=11n-2,\ l=126n-23$$

したがって，$k>0$ となる最小の $k$ は，$n=1$ のとき　$k={}^{サ}9$

このとき　$l={}^{シスセ}103$

別解　($126k-11l=1$ を満たす整数の組の見つけ方)

$126k-11l=1$ より　$(11\cdot11+5)k-11l=1$

すなわち　$5k+11(11k-l)=1$

$11k-l=t$ とおくと　$5k+11t=1$

これを満たす整数の組の 1 つは　$k=-2,\ t=1$

以下，本解と同様。

(4)　(2) より，$\sqrt{am}$ が自然数であるとき　$\sqrt{am}=126k$　($k$ は自然数)

$m=21k^2$ であるから，$m$ が最小となるのは $k$ が最小のときである。

(3) より，$\sqrt{am}$ が 11 で割ると 1 余る自然数となるような最小の $k$ は　$k=9$

したがって，求める最小の $m$ は　$m=21\cdot9^2={}^{ソタチツ}1701$