# 数学Ⅰ･A 第 2 問〔2〕

△ABC において，余弦定理により　$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC$

よって　$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ = 9 + 25 - 2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 49$

$AC > 0$ であるから　$AC = {}^{オ}7$

また　$\sin\angle ABC = \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{{}^{カ}3}}{{}^{キ}2}$

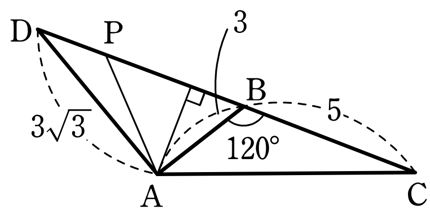
△ABC において，正弦定理により　$\dfrac{AB}{\sin\angle BCA} = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$

すなわち　$\dfrac{3}{\sin\angle BCA} = \dfrac{7}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

ゆえに　$\sin\angle BCA = 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{{}^{ク}3\sqrt{{}^{ケ}3}}{{}^{コサ}14}$

△ACP において，正弦定理により

$$\frac{AP}{\sin\angle ACP} = 2R$$




したがって　$R = \dfrac{AP}{2\sin\angle ACP} = \dfrac{AP}{2\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14}}$

$$= \frac{7}{3\sqrt{3}}AP \quad \cdots\cdots ①$$

よって，$R$ のとり得る値の範囲を求めるためには，AP のとり得る値の範囲を求めればよい。

∠ABC は鈍角であるから，AP が直線 BC の垂線となるとき，点 P は線分 BD 上にあり，AP の値は最小となる。

$AP\perp BC$ のとき　$AP = AC\sin\angle ACP = 7\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{14} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

また，$AD > AB$ であるから，点 P が点 D に一致するとき，AP の値は最大となる。

このとき　$AP = AD = 3\sqrt{3}$

ゆえに，AP のとり得る値の範囲は　$\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \leqq AP \leqq 3\sqrt{3}$

これと ① から，$R$ のとり得る値の範囲は　$\dfrac{{}^{シ}7}{{}^{ス}2} \leqq R \leqq {}^{セ}7$