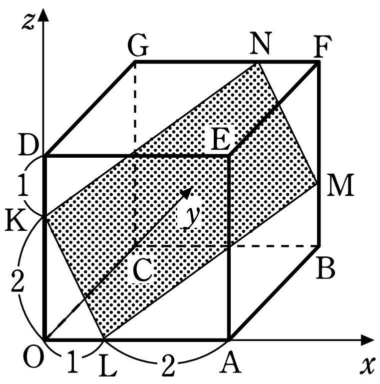
数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　L(1, 0, 0)，K(0, 0, 2) であるから

$$\overrightarrow{LK}=(0-1,\ 0-0,\ 2-0)$$
$$=({}^{アイ}-1,\ {}^{ウ}0,\ {}^{エ}2)$$



四角形 KLMN が平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}\qquad({}^{オ}③)$$

M(3, 3, s)，N(t, 3, 3) と表すと，

$\overrightarrow{MN}=(t-3,\ 0,\ 3-s)$ であるから

$$-1=t-3,\ 2=3-s$$

ゆえに　$s={}^{カ}1$，$t={}^{キ}2$

よって　M(3, 3, 1)，N(2, 3, 3)

したがって，N は FG を 1 : ${}^{ク}2$ に内分する。

ここで　$\overrightarrow{LM}=(3-1,\ 3-0,\ 1-0)=(2,\ 3,\ 1)$

よって　$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}=(-1)\times2+0\times3+2\times1={}^{ケ}0$

$$|\overrightarrow{LK}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{{}^{コ}5}$$
$$|\overrightarrow{LM}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{{}^{サシ}14}$$

$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}=0$ より $\overrightarrow{LK}\perp\overrightarrow{LM}$ であるから，四角形 KLMN は長方形であり，その面積は

$$|\overrightarrow{LK}|\times|\overrightarrow{LM}|=\sqrt{5}\times\sqrt{14}=\sqrt{{}^{スセ}70}$$

(2)　P(p, q, r) とおく。

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{LK}$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{LM}$ であるから　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}={}^{ソ}0$

よって　$-p+2r=2p+3q+r=0$　　ゆえに　$p={}^{タ}2r$，$q=\dfrac{{}^{チツ}-5}{{}^{テ}3}r$

また　$\overrightarrow{PL}=(1-p,\ -q,\ -r)=\left(1-2r,\ \dfrac{5}{3}r,\ -r\right)$

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{PL}$ であるから　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PL}=0$

よって　$2r\times(1-2r)+\left(-\dfrac{5}{3}r\right)\times\dfrac{5}{3}r+r\times(-r)=0$

整理すると　$35r^2-9r=0$　　すなわち　$r(35r-9)=0$

$r\neq0$ であるから　$r=\dfrac{{}^{ト}9}{{}^{ナニ}35}$

ゆえに　$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(2r)^2+\left(-\dfrac{5}{3}r\right)^2+r^2}=\sqrt{4r^2+\dfrac{25}{9}r^2+r^2}$

$$=\sqrt{\frac{70}{9}r^2}=\frac{r}{3}\sqrt{70}=\frac{9}{35}\times\frac{1}{3}\sqrt{70}=\frac{{}^{ヌ}3\sqrt{{}^{ネノ}70}}{{}^{ハヒ}35}$$

したがって，三角錐 OLMN の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle LMN\times|\overrightarrow{OP}|=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{70}\right)\times\frac{3\sqrt{70}}{35}={}^{フ}1$$