

数学Ⅱ・B 第3問

(1) $\{a_n\}$ の階差数列の初項は 9, 第 2 項は $9+4=13$ であるから

$$a_2 = a_1 + 9 = 6 + 9 = \text{アイ} 15$$

$$a_3 = a_2 + 13 = 15 + 13 = \text{ウエ} 28$$

$\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項は $9 + (n-1) \cdot 4 = \text{オ} 4n + \text{カ} 5$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k+5) = 6 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 5(n-1) = 2n^2 + 3n + 1 \quad \dots\dots (*)$$

(*) は $n=1$ のときも成り立つ。

$$\text{したがって} \quad a_n = \text{キ} 2n^2 + \text{ケ} 3n + \text{コ} 1 \quad \dots\dots \text{①}$$

$$(2) \quad b_1 = \frac{2}{5} \text{ と ② から} \quad b_2 = \frac{a_1}{a_2-1} b_1 = \frac{6}{15-1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{14} \cdot \frac{2}{5} = \frac{\text{サ} 6}{\text{シス} 35}$$

①, ② により

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_n}{a_{n+1}-1} b_n = \frac{2n^2+3n+1}{2(n+1)^2+3(n+1)} b_n = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+7n+5} b_n \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+5)} b_n = \frac{\text{セ} 2n + \text{ソ} 1}{2n + \text{タ} 5} b_n \quad \dots\dots \text{③} \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } c_n = (2n+1)b_n \text{ とすると} \quad b_n = \frac{c_n}{2n+1}$$

$$\text{これと ③ により} \quad \frac{c_{n+1}}{2n+3} = \frac{c_n}{2n+5}$$

$$\text{よって} \quad (2n+5)c_{n+1} = (2n+3)c_n$$

$$\text{(左辺)} = \{2(n+1)+3\}c_{n+1} \text{ であるから, } d_n = (2n+3)c_n \text{ とおくと} \quad d_{n+1} = d_n$$

$$d_1 = 5c_1 = 5 \cdot 3b_1 = 5 \cdot 3 \cdot \frac{2}{5} = \text{ト} 6 \text{ であるから, すべての自然数 } n \text{ に対して} \quad d_n = 6$$

$$d_n = (2n+3)c_n \text{ から} \quad (2n+3)c_n = 6$$

$$c_n = (2n+1)b_n \text{ から} \quad (2n+1)(2n+3)b_n = 6$$

$$\text{ゆえに} \quad b_n = \frac{6}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$\text{変形すると} \quad b_n = \frac{\text{ナ} 3}{2n+1} - \frac{\text{ニ} 3}{2n+3}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad S_n &= \sum_{k=1}^n b_k = 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= 3 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots\dots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = 3 \cdot \frac{(2n+3)-3}{3(2n+3)} = \frac{\text{ハ} 2n}{\text{ニ} 2n + \text{ホ} 3} \end{aligned}$$