数学Ⅱ・B　第 2 問

(1)　$f(x)=x^3-px$ から　　$f'(x)={}^{ア}3x^{{}^{イ}2}-p$

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$f'(a)=0$ すなわち $3a^2-p={}^{ウ}0$ が成り立つ。

$p\leqq 0$ のとき，$f'(x)=3x^2-p\geqq 0$ となり，$f(x)$ は常に増加し，極値をもたない。

$p>0$ のとき，a の 2 次方程式

$3a^2-p=0$ は異なる 2 つの実数解

$a=\pm\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ をもち，右の増減表から

$f(x)$ は $x=\pm\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ で極値をもつ。

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{p}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{p}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$f(x)$ が極値をもつための p の条件は　　$p>0$　　$({}^{エ}①)$

(2)　$f(x)$ は $x=\dfrac{p}{3}$ で極値をとるから　　$f'\left(\dfrac{p}{3}\right)=0$

よって　　$3\left(\dfrac{p}{3}\right)^2-p=0$　　ゆえに　　$p(p-3)=0$

(1) より $p>0$ であるから　　$p={}^{オ}3$

このとき　　$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，$f(x)$ は $x={}^{カキ}-1$ で極大値をとり，$x={}^{ク}1$ で極小値をとる。

ℓ は点 $(b,\ f(b))$ における C の接線であるから，その方程式は

$$y=({}^{ケ}3b^2-{}^{コ}3)(x-b)+f(b)$$

また，ℓ は点 A $(1,\ -2)$ を通るから

$$-2=(3b^2-3)(1-b)+(b^3-3b)\qquad すなわち\qquad {}^{サ}2b^3-{}^{シ}3b^2+1=0$$

左辺を因数分解すると　　$(b-1)^2(2b+1)=0$　　ゆえに　　$b={}^{ス}1,\ \dfrac{{}^{セソ}-1}{{}^{タ}2}$

$b=1$ のとき，ℓ の傾きは $f'(1)=0$ となり不適。

$b=-\dfrac{1}{2}$ のとき，ℓ の傾きは $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-3=-\dfrac{9}{4}$ となり適する。

したがって，ℓ の方程式は

$$y=-\frac{9}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{11}{8}\qquad すなわち\qquad y=\frac{{}^{チツ}-9}{{}^{テ}4}x+\frac{{}^{ト}1}{{}^{ナ}4}$$

D は点 A $(1,\ -2)$ を頂点とするから，その方程式は $y=c(x-1)^2-2$ とおける。

これが原点を通るから　　$0=c(-1)^2-2$　　ゆえに　　$c=2$

よって，D の方程式は　　$y=2(x-1)^2-2$　　すなわち　　$y={}^{ニ}2x^2-{}^{ヌ}4x$

したがって，求める面積 S は

$$S=\int_0^1\left\{-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}-(2x^2-4x)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-2x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}=\frac{^{\text{ネノ}}11}{24}$$