数学Ⅱ・B　第 1 問〔2〕

$m=2$，$n=1$ のとき

$$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 2^3+\log_3 1^2=3+0={}^{ソ}3$$

$m=4$，$n=3$ のとき

$$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 4^3+\log_3 3^2=\log_2 2^6+2=6+2={}^{タ}8$$

$\log_2 m^3+\log_3 n^2\leqq 3$ …… ④ から　　$3\log_2 m+2\log_3 n\leqq 3$

この両辺を $3\,(>0)$ で割ると　　$\log_2 m+\dfrac{{}^{チ}2}{{}^{ツ}3}\log_3 n\leqq{}^{テ}1$　…… ⑤

n の値が大きくなるほど $\log_3 n$ の値は大きくなるから，$\log_3 n$ のとり得る最小の値は

$$\log_3 1={}^{ト}0$$

よって，$\log_2 m\leqq 1$ でなければならない。

m は自然数であるから　　$m={}^{ナ}1$　または　$m={}^{ニ}2$

$m=1$ の場合，⑤ は　　$\dfrac{2}{3}\log_3 n\leqq 1$　すなわち　$\log_3 n\leqq\dfrac{{}^{ヌ}3}{{}^{ネ}2}$

対数の底 3 は 1 より大きいから　　$n\leqq 3^{\frac{3}{2}}$

よって　　$n^2\leqq 3^3={}^{ノハ}27$

n は自然数であるから，n のとり得る値の範囲は　　$n\leqq{}^{ヒ}5$

$n\leqq 5$ を満たす自然数 n は 5 個ある。

したがって，$m=1$ の場合，④ を満たす自然数 m，n の組の個数は 5 である。

$m=2$ の場合，⑤ は　　$1+\dfrac{2}{3}\log_3 n\leqq 1$　すなわち　$\log_3 n\leqq 0$

n は自然数であるから，$\log_3 n\leqq 0$ となるのは $n=1$ の場合だけである。

よって，$m=2$ の場合，④ を満たす自然数 m，n の組の個数は ${}^{フ}1$ である。

以上のことから，④ を満たす自然数 m，n の組の個数は　　$5+1={}^{ヘ}6$