数学Ⅱ・B　第１問〔1〕

(1)　点 P を通り直線 ℓ に垂直な直線の方程式は　　$y=-\frac{^{ア}3}{^{イ}4}(x-p)+q$

この式と $y=\frac{4}{3}x$ から y を消去すると　　$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}(x-p)+q$

分母を払って整理すると　　$25x=9p+12q$

よって　　$x=\frac{3}{25}(3p+4q)$

このとき，$y=\frac{4}{3}x$ から　　$y=\frac{4}{25}(3p+4q)$

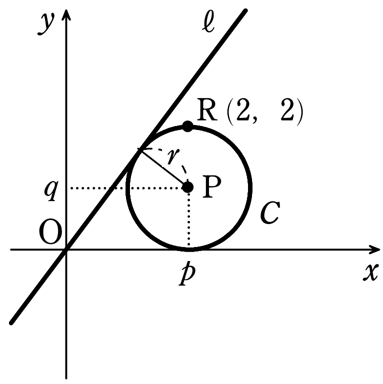
ゆえに，点 Q の座標は　　$\left(\frac{3}{25}(^{ウ}3p+{}^{エ}4q),\ \frac{4}{25}(3p+4q)\right)$

また，C の半径 r は，$\mathrm{P}(p,\ q)$ と直線 $\ell : 4x-3y=0$ の距離に等しいから

$$r=\frac{|4p-3q|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{1}{5}|^{オ}4p-{}^{カ}3q|$$

注意　$r(=\mathrm{PQ})$ は，点 P，Q の座標がわかっているため，三平方の定理を用いて求めることもできる。点 Q の座標を求めたのは，この解法の誘導と思われる。ただ，点と直線の距離の公式を用いた方が計算量が少なくなるため，上の解答とした。

(2)　C の半径 r は q に等しいから　　$q=\frac{1}{5}|4p-3q|$



[1]　$4p-3q\geqq 0$ の場合

$q=\frac{1}{5}(4p-3q)$ であるから　　$p=2q$

[2]　$4p-3q<0$ の場合

$q=\frac{1}{5}(-4p+3q)$ であるから　　$p=-\frac{1}{2}q$

これは，$p>0$，$q>0$ に矛盾する。

[1]，[2] から　　$p={}^{キ}2q$

よって，円 C の方程式は　　$(x-2q)^2+(y-q)^2=q^2$

C は点 $\mathrm{R}(2,\ 2)$ を通るから　　$(2-2q)^2+(2-q)^2=q^2$

整理すると　　$q^2-3q+2=0$

すなわち　　$(q-1)(q-2)=0$

したがって　　$q=1,\ 2$

よって，求める C の方程式は

$$(x-{}^{ク}2)^2+(y-{}^{ケ}1)^2={}^{コ}1 \quad \text{または} \quad (x-{}^{サ}4)^2+(y-{}^{シ}2)^2={}^{ス}4$$

別解　((キ) の求め方)

点 R は直線 ℓ の下側にあるから，円の中心 $\mathrm{P}(p,\ q)$ も直線 ℓ の下側にある。

すなわち，点 P は不等式 $y<\frac{4}{3}x$ の表す領域にあるから　　$q<\frac{4}{3}p$

よって　　$4p-3q>0$

したがって，$q=\dfrac{1}{5}(4p-3q)$ であるから　　$p=^{キ}2q$

(3)　S(2, 1)，T(4, 2) であるから

　　$SO : OT=1 : 2$

よって，点 O は線分 ST を 1 : 2 に外分する。　(セ 4)