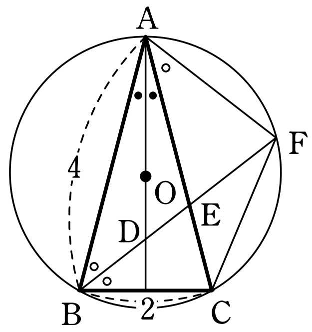
数学Ⅰ･A 第 3 問



△ABC において余弦定理により

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{4}=16$$

CA＞0 であるから　　$\mathrm{CA}={}^{ア}4$

また，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}}=\frac{4^2+4^2-2^2}{2\cdot4\cdot4}=\frac{{}^{イ}7}{{}^{ウ}8}$$

sin∠BAC＞0 であるから

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{{}^{エオ}15}}{{}^{カ}8}$$

外接円 O の半径を R とすると，正弦定理により　　$2R=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}$

ゆえに　　$R=\dfrac{\mathrm{BC}}{2\sin\angle\mathrm{BAC}}=\dfrac{2}{2\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{8}}=\dfrac{{}^{キ}8\sqrt{{}^{クケ}15}}{{}^{コサ}15}$

(1)　BE は ∠ABC の二等分線であるから　　AE：EC＝AB：BC＝4：2＝2：1

よって　　$\mathrm{AE}=\dfrac{2}{2+1}\mathrm{AC}=\dfrac{2}{3}\cdot4=\dfrac{{}^{シ}8}{{}^{ス}3}$

△ABE において余弦定理により

$$\mathrm{BE}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AE}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AE}\cos\angle\mathrm{BAE}=4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{40}{9}$$

BE＞0 であるから　　$\mathrm{BE}=\sqrt{\dfrac{40}{9}}=\dfrac{{}^{セ}2\sqrt{{}^{ソタ}10}}{{}^{チ}3}$

AD は ∠BAE の二等分線であるから　　$\mathrm{BD}:\mathrm{DE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AE}=4:\dfrac{8}{3}=3:2$

ゆえに　　$\mathrm{BD}=\dfrac{3}{3+2}\mathrm{BE}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{3}=\dfrac{{}^{ツ}2\sqrt{{}^{テト}10}}{{}^{ナ}5}$

(2)　△EBC と △EAF において

$\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{EAF}$　($\overset{\frown}{\mathrm{FC}}$ に対する円周角)，　$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{AEF}$　(対頂角)

2 組の角がそれぞれ等しいから　　△EBC ∽ △EAF

△EBC と △EAF の相似比は　　$\mathrm{BE}:\mathrm{AE}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}:\dfrac{8}{3}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}:1$

よって，△EBC の面積は △EAF の面積の $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2=\dfrac{{}^{ニ}5}{{}^{ヌ}8}$ 倍である。

(3)　BF は ∠ABC の二等分線であるから　　∠FBA＝∠FBC

よって　　$\overset{\frown}{\mathrm{FA}}=\overset{\frown}{\mathrm{FC}}$　　　ゆえに　　FA＝FC

さらに　　$\angle\mathrm{FAD}=\angle\mathrm{FAC}+\angle\mathrm{CAD}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}+\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{BAC},$

$$\angle\mathrm{FDA}=\angle\mathrm{ABD}+\angle\mathrm{BAD}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{ABC}+\frac{1}{2}\angle\mathrm{BAC}$$

ゆえに　　$\angle\mathrm{FAD}=\angle\mathrm{FDA}$

よって，$\triangle\mathrm{FAD}$ は $\mathrm{FA}=\mathrm{FD}$ の二等辺三角形である。

以上から　　$\mathrm{FA}=\mathrm{FC}=\mathrm{FD}$　　（ネ ④）