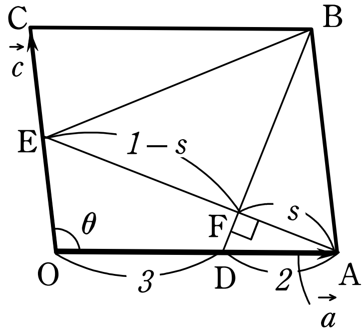
数学Ⅱ・B　第 4 問

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{{}^{\text{ア}}2}{{}^{\text{イ}}5}\vec{a}+\vec{c}$



$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=5\cdot4\cos\theta={}^{\text{ウエ}}20\cos\theta$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}={}^{\text{オ}}0$

一方　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(t\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}\right)$

$$=\frac{2}{5}t\vec{a}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2-\frac{2}{5}|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$=\frac{2}{5}t\times20\cos\theta+t\times4^2-\frac{2}{5}\times5^2-20\cos\theta$$

$$=8t(\cos\theta+2)-10(2\cos\theta+1)$$

以上から　$8t(\cos\theta+2)-10(2\cos\theta+1)=0$

$\cos\theta+2>0$ であるから，t について解くと　$t=\dfrac{{}^{\text{カ}}5({}^{\text{キ}}2\cos\theta+1)}{{}^{\text{ク}}4(\cos\theta+{}^{\text{ケ}}2)}$　…… ①

(2)　$0\leqq t\leqq1$ から　$0\leqq\dfrac{5(2r+1)}{4(r+2)}\leqq1$

$-1<r<1$ であるから　$0\leqq5(2r+1)\leqq4(r+2)$　…… ②

$0\leqq5(2r+1)$ より　$r\geqq-\dfrac{1}{2}$

$5(2r+1)\leqq4(r+2)$ より　$r\leqq\dfrac{1}{2}$

よって　$-\dfrac{1}{2}\leqq r\leqq\dfrac{1}{2}$　　ゆえに　$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ であるから　$\dfrac{\pi}{{}^{\text{コ}}3}\leqq\theta\leqq\dfrac{{}^{\text{サ}}2}{{}^{\text{シ}}3}\pi$

(3)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$ であるから，① より　$t=\dfrac{5\left\{2\left(-\dfrac{1}{8}\right)+1\right\}}{4\left(-\dfrac{1}{8}+2\right)}=\dfrac{5\cdot\dfrac{3}{4}}{4\cdot\dfrac{15}{8}}=\dfrac{{}^{\text{ス}}1}{{}^{\text{セ}}2}$

点 F は直線 DB 上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=k\overrightarrow{\mathrm{DB}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+k\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}+\vec{c}\right)=\dfrac{2k+3}{5}\vec{a}+k\vec{c}$

また，AF : FE$=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{s}{2}\vec{c}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{c}$ であるから　$\dfrac{2k+3}{5}=1-s$，$k=\dfrac{s}{2}$

これを解くと　$k=\dfrac{1}{6}$，$s=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{{}^{\text{ソ}}2}{{}^{\text{タ}}3}\vec{a}+\dfrac{{}^{\text{チ}}1}{{}^{\text{ツ}}6}\vec{c}$

また，AF : FE$=\dfrac{1}{3}:\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=1:2$ より，点 F は線分 AE を 1 : $^{テ}2$ に内分する。

平行四辺形 OABC の面積 S とする。

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{63}{64}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$S=2\times\triangle\mathrm{OAC}=2\times\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\sin\theta=5\times4\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{^{トナ}15\sqrt{^{ニ}7}}{^{ヌ}2}$$

AB∥OC であるから　　$\triangle\mathrm{ABE}=\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{S}{2}$

また　　$\triangle\mathrm{BEF}:\triangle\mathrm{ABE}=\mathrm{EF}:\mathrm{AE}=2:3$

よって　$\triangle\mathrm{BEF}=\dfrac{2}{3}\times\triangle\mathrm{ABE}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{S}{2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15\sqrt{7}}{2}=\dfrac{^{ネ}5\sqrt{^{ノ}7}}{^{ハ}2}$

別解 (AF : FE の求め方)

直線 BD と直線 OC の交点を G とする。

$$\mathrm{AB}:\mathrm{OG}=\mathrm{AD}:\mathrm{OD}=2:3$$

よって　　$\mathrm{OG}=\dfrac{3}{2}\times\mathrm{AB}=\dfrac{3}{2}\times4=6$

ゆえに　　$\mathrm{AF}:\mathrm{FE}=\mathrm{AB}:\mathrm{GE}=4:(6+2)=1:2$