数学Ⅱ・B　第 3 問

(1)　$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+1$ ……① を変形すると　$p_{n+1}-\frac{{}^{\text{ア}}3}{{}_{\text{イ}}2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{3}{2}\right)$

よって，数列 $\left\{p_n-\frac{3}{2}\right\}$ は初項 $p_1-\frac{3}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，数列 $\{p_n\}$ の一般項は　$p_n=\frac{1}{{}_{\text{ウ}}2\cdot{}^{\text{エ}}3^{n-2}}+\frac{{}^{\text{オ}}3}{{}_{\text{カ}}2}$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2\cdot3^{k-2}}+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+\frac{3}{2}n$

$$=\frac{{}^{\text{キ}}9}{{}_{\text{ク}}4}\left(1-\frac{1}{{}_{\text{ケ}}3^n}\right)+\frac{{}^{\text{コ}}3n}{{}_{\text{サ}}2}$$

(2)　$a_1=3$，$a_2=3$，$a_3=3$ と ② から

$$a_4=\frac{a_1+a_2}{a_3}=\frac{3+3}{3}={}^{\text{シ}}2,\qquad a_5=\frac{a_2+a_3}{a_4}=\frac{3+3}{2}=3$$

$$a_6=\frac{a_3+a_4}{a_5}=\frac{3+2}{3}=\frac{{}^{\text{ス}}5}{{}_{\text{セ}}3},\qquad a_7=\frac{a_4+a_5}{a_6}=\frac{2+3}{\frac{5}{3}}=3$$

したがって，$b_1=b_2=b_3=b_4=3$ となるので

$b_n=3$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$　……③

と推定できる。

③ を示すためには，$b_1=3$ から，すべての自然数 n に対して

$b_{n+1}=b_n$　……④

であることを示せばよい。これを，数学的帰納法を用いて証明する。　（ソ ②）

［Ⅰ］ $n=1$ のとき，$b_1=3$，$b_2=3$ であるから　$b_1=b_2$

よって，④ は成り立つ。

［Ⅱ］ $n=k$ のとき，④ が成り立つ，すなわち

$b_{k+1}=b_k$　……⑤

と仮定する。

② の n に $2k$ を代入すると　$a_{2k+3}=\frac{a_{2k}+a_{2k+1}}{a_{2k+2}}$

$$a_{2k+3}=a_{2(k+2)-1}=b_{k+2},\qquad a_{2k+2}=a_{2(k+1)}=c_{k+1},$$

$$a_{2k+1}=a_{2(k+1)-1}=b_{k+1},\qquad a_{2k}=c_k$$

であるから　$b_{k+2}=\frac{c_k+{}^{\text{タ}}b_{k+1}}{{}_{\text{チ}}c_{k+1}}$

同様に $a_{2k+2}=\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{a_{2k+1}}$ から　$c_{k+1}=\frac{{}^{\text{ツ}}b_k+c_k}{{}_{\text{テ}}b_{k+1}}$　……⑥

以上から　　$b_{k+2}=\dfrac{c_k+b_{k+1}}{\dfrac{b_k+c_k}{b_{k+1}}}=\dfrac{(^{ト}\ c_k+{}^{ナ}\ b_{k+1})^{ニ}\ b_{k+1}}{b_k+c_k}$

⑤ より，$b_{k+1}=b_k$ であるから　　$b_{k+2}=\dfrac{(c_k+b_k)b_{k+1}}{b_k+c_k}=b_{k+1}$

ゆえに，④ は $n=k+1$ のときにも成り立つ。

[Ⅰ]，[Ⅱ] により，すべての自然数 n に対して ④ の成り立つことが証明された。

したがって，③ が成り立つので，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=3$ である。

次に，⑥ と同様の計算により

$$c_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{b_{n+1}}=\frac{3+c_n}{3}=\frac{1}{3}c_n+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

となり，$c_1=a_2={}^{ヌ}\ 3$ であることと ① から，数列 $\{c_n\}$ の一般項は，(1) で求めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。