数学Ⅱ・B　第 2 問

$f(x)=x^3-3a^2x+a^3$ から　　$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-a,\ a$

$a>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$3a^3$	$\searrow$	$-a^3$	$\nearrow$

よって，関数 $y=f(x)$ は

$x={}^{\text{アイ}}-a$ で極大値 ${}^{\text{ウ}}3a^{{}^{\text{エ}}3}$ をとり，

$x={}^{\text{オ}}a$ で極小値 ${}^{\text{カ}}-a^{{}^{\text{キ}}3}$ をとる。

原点を通る放物線 $y=px^2+qx$（$p,\ q$ は定数かつ $p\neq 0$）が 2 点 $(-a,\ 3a^3)$，$(a,\ -a^3)$ を通るとき　　$pa^2-qa=3a^3$　$\cdots\cdots$ ①，　$pa^2+qa=-a^3$　$\cdots\cdots$ ②

①＋② から　　$2pa^2=2a^3$　　　$a>0$ であるから　　$p=a$

②－① から　　$2qa=-4a^3$　　　$a>0$ であるから　　$q=-2a^2$

よって，放物線 C の方程式は　　$y={}^{\text{ク}}ax^2-{}^{\text{ケ}}2a^{{}^{\text{コ}}2}x$

$y=ax^2-2a^2x$ から　　$y'=2ax-2a^2$

ゆえに，原点における C の接線 ℓ の方程式は　　$y={}^{\text{サシ}}-2a^{{}^{\text{ス}}2}x$

また，原点を通り ℓ に垂直な直線 m の方程式は　　$y=\dfrac{1}{{}^{\text{セ}}2a^{{}^{\text{ソ}}2}}x$

x 軸に関して放物線 C と対称な放物線 D の方程式は　　$-y=ax^2-2a^2x$

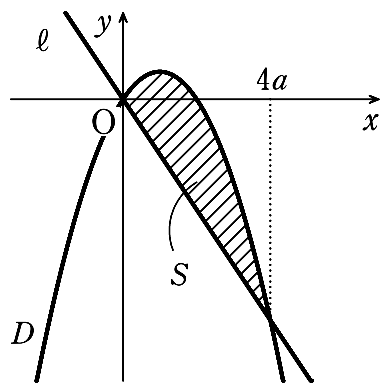
すなわち　　$y=-ax^2+2a^2x$

$D:y=-ax^2+2a^2x$ と $\ell:y=-2a^2x$ から y を消去して　　$-ax^2+2a^2x=-2a^2x$

整理すると　　$ax(x-4a)=0$　　　よって　　$x=0,\ 4a$

放物線 D と直線 ℓ の交点の x 座標は　　$0,\ 4a$

放物線 D と直線 ℓ で囲まれた図形の面積 S は



$$S=\int_0^{4a}\{(-ax^2+2a^2x)-(-2a^2x)\}dx$$

$$=-a\int_0^{4a}x(x-4a)dx$$

$$=\frac{a}{6}\cdot(4a-0)^3$$

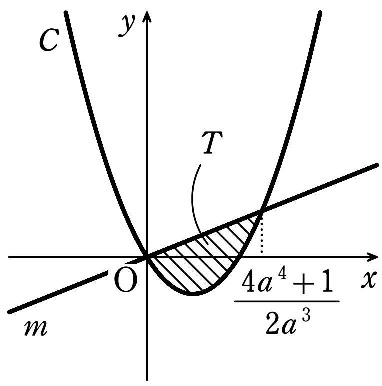
$$=\frac{{}^{\text{タチ}}32}{{}^{\text{ツ}}3}a^{{}^{\text{テ}}4}$$

$C:y=ax^2-2a^2x$ と $m:y=\dfrac{1}{2a^2}x$ から y を消去して　　$ax^2-2a^2x=\dfrac{1}{2a^2}x$

整理すると　　$x\left(ax-\dfrac{4a^4+1}{2a^2}\right)=0$　　　よって　　$x=0,\ \dfrac{4a^4+1}{2a^3}$

放物線 C と直線 m の交点の x 座標は　　$0,\ \dfrac{4a^{{}^{\text{ト}}4}+1}{2a^{{}^{\text{ナ}}3}}$

放物線 C と直線 m で囲まれた図形の面積 T は



$$T=\int_0^{\frac{4a^4+1}{2a^3}}\left\{\frac{1}{2a^2}x-(ax^2-2a^2x)\right\}dx$$

$$=-a\int_0^{\frac{4a^4+1}{2a^3}}x\left(x-\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)dx$$

$$=\frac{a}{6}\cdot\left(\frac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$$

$S=T$ であるとき　　$\dfrac{a}{6}\cdot(4a)^3=\dfrac{a}{6}\cdot\left(\dfrac{4a^4+1}{2a^3}\right)^3$

a は正の実数であるから　　$4a=\dfrac{4a^4+1}{2a^3}$　　　　すなわち　　$8a^4=4a^4+1$

ゆえに　　$a^4=\dfrac{^{\text{ニ}}1}{^{\text{ヌ}}4}$

このとき　$S=\dfrac{32}{3}a^4=\dfrac{32}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{^{\text{ネ}}8}{^{\text{ノ}}3}$

$\boxed{\text{参考}}$　$S=T$ となるための条件は，原点以外の，D と ℓ の交点の x 座標と，C と m の交点の x 座標が等しくなることである。