数学Ⅱ・B 第 1 問〔2〕

$x+y+z=3$ から　　$XYZ=2^x\cdot 2^y\cdot 2^z=2^{x+y+z}=2^3={}^{ソ}8$

$2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2}$ から　　$X+Y+Z=2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2}$

$\dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16}$ から　　$\dfrac{2^x\cdot 2^y+2^y\cdot 2^z+2^z\cdot 2^x}{2^x\cdot 2^y\cdot 2^z}=\dfrac{49}{16}$

よって　　$XY+YZ+ZX=2^x\cdot 2^y+2^y\cdot 2^z+2^z\cdot 2^x=\dfrac{49}{16}\cdot(2^x\cdot 2^y\cdot 2^z)=\dfrac{49}{16}\cdot 8=\dfrac{{}^{タチ}49}{{}^{ツ}2}$

ゆえに　　
$$\begin{aligned}(t-X)(t-Y)(t-Z)&=t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ\\&=t^3-\frac{35}{2}t^2+\frac{49}{2}t-8\\&=\left(t-\frac{1}{2}\right)(t^2-17t+16)\\&=\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-{}^{テ}1)(t-{}^{トナ}16)\end{aligned}$$

X, Y, Z は t の 3 次方程式 $(t-X)(t-Y)(t-Z)=0$ すなわち $\left(t-\dfrac{1}{2}\right)(t-1)(t-16)=0$ の

3 つの実数解であり，$0<X\leqq Y\leqq Z$ を満たすから　　$X=\dfrac{1}{2}$，$Y=1$，$Z=16$

したがって　　$x=\log_{{}^{ニ}2}X=\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}={}^{ヌネ}-1$,

$y=\log_2 Y=\log_2 1={}^{ノ}0$,

$z=\log_2 Z=\log_2 16=\log_2 2^4={}^{ハ}4$