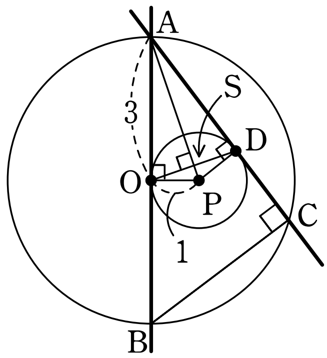
数学I・A 第3問

$\angle AOP=90°$ であるから

$$AP=\sqrt{AO^2+OP^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{{}^{アイ}10}$$



$AO=AD=3$ であるから $\triangle OAD$ は二等辺三角形であり，

AP は線分 OD の垂直二等分線である。

線分 AP，OD の交点を S とする。

$\triangle OAP$ と $\triangle SAO$ について

$$\angle AOP=\angle ASO=90°,\qquad \angle OAP=\angle SAO$$

よって　　$\triangle OAP\backsim\triangle SAO$

ゆえに　　$OP:SO=AP:AO$

$SO=\dfrac{1}{2}OD$ であるから　　$OP:\dfrac{1}{2}OD=AP:AO$

すなわち　　$1:\dfrac{1}{2}OD=\sqrt{10}:3$　　　よって　　$OD=\dfrac{{}^{ウ}3\sqrt{{}^{エオ}10}}{{}^{カ}5}$

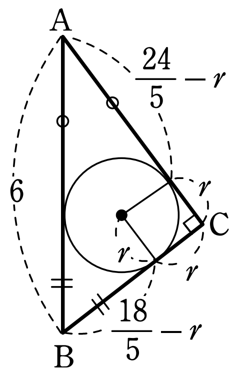
$\triangle OAD$ について，余弦定理により

$$\cos\angle OAD=\frac{AO^2+AD^2-OD^2}{2AO\cdot AD}=\frac{3^2+3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2}{2\cdot3\cdot3}=\frac{{}^{キ}4}{{}^{ク}5}$$

$\triangle ABC$ は直角三角形であり，$\cos\angle BAC=\cos\angle OAD=\dfrac{4}{5}$ であるから，$\triangle ABC$ は

$AB:BC:AC=5:3:4$ の直角三角形である。

よって　　$AC=\dfrac{4}{5}AB=\dfrac{4}{5}\cdot6=\dfrac{{}^{ケコ}24}{{}^{サ}5}$，$BC=\dfrac{3}{5}AB=\dfrac{3}{5}\cdot6=\dfrac{18}{5}$



ゆえに，$\triangle ABC$ の面積は　　$\dfrac{1}{2}BC\cdot AC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{24}{5}=\dfrac{{}^{シスセ}216}{{}^{ソタ}25}$

また，$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とすると，右の図より

$$\left(\frac{18}{5}-r\right)+\left(\frac{24}{5}-r\right)=6$$

よって　　$r=\dfrac{{}^{チ}6}{{}^{ツ}5}$

別解　(△ABC の内接円の半径)

$\triangle ABC$ の面積は，内接円の半径 r を用いて，$\dfrac{1}{2}r(AB+BC+AC)$ と表される。

よって　　$\dfrac{1}{2}r\left(6+\dfrac{18}{5}+\dfrac{24}{5}\right)=\dfrac{216}{25}$　　　ゆえに　　$r=\dfrac{6}{5}$

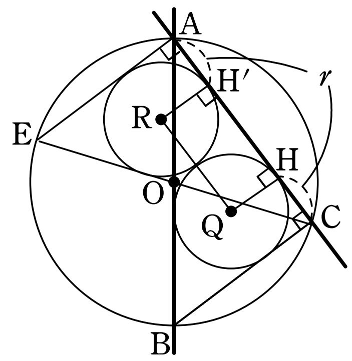
(1)　$\triangle$ABC と $\triangle$CEA について

　$\angle$BCA$=\angle$EAC$=90^\circ$，AB$=$CE，AC$=$CA

よって　　$\triangle$ABC$\equiv\triangle$CEA

ゆえに，円 Q と円 R の半径は等しい。

よって，点 Q，R から線分 AC に垂線 QH，RH′ を下ろすと，四角形 QRH′H は長方形である。



$\mathrm{CH}=\mathrm{AH'}=r=\dfrac{6}{5}$ であるから

$$\mathrm{QR}=\mathrm{HH'}=\mathrm{AC}-(\mathrm{CH}+\mathrm{AH'})=\frac{24}{5}-\left(\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\right)=\frac{^{テト}12}{^{ナ}5}$$

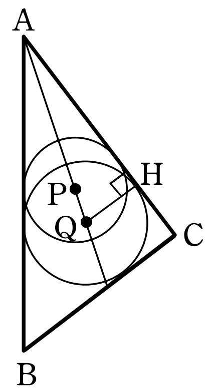
さらに，円 Q と円 R の半径の和は $\dfrac{6}{5}+\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{5}$ であるから

$$\mathrm{QR}=(\text{円Q と円 R の半径の和})$$

よって，円 Q と円 R は外接する。(^{ニ}②)

(2)　$\triangle$AQH について，三平方の定理により

$$\mathrm{AQ}=\sqrt{\mathrm{QH}^2+\mathrm{AH}^2}=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{18}{5}\right)^2}=\frac{^{ヌ}6\sqrt{^{ネノ}10}}{^{ハ}5}$$



P，Q はいずれも $\angle$BAC の二等分線上にあるから，A，P，Q は一直線上にある。

よって　　$\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}-\mathrm{AP}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}-\sqrt{10}=\dfrac{\sqrt{^{ヒフ}10}}{^{ヘ}5}$

円 Q の半径は $\dfrac{6}{5}$ であり，$\mathrm{PQ}<\dfrac{6}{5}$ であるから，点 P は円 Q の内部にある。

円 P の半径は 1 であり，PQ<1 であるから，点 Q は円 P の内部にある。

したがって　　^{ホ}②