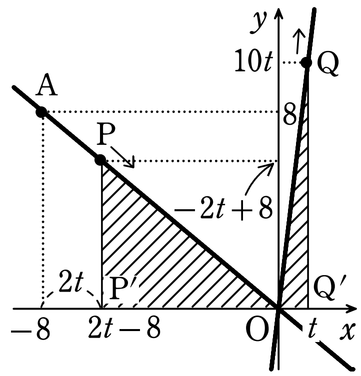
数学Ⅰ・A 第2問



点Pのx座標はt秒間に$2t$増加し，点Qのx座標はt秒間にt増加する。

よって，出発してからt秒後のPのx座標は$2t-8$，Qのx座標はtである。

ゆえに，t秒後のPの座標は　$(2t-8,\ -2t+8)$

Qの座標は　$(t,\ 10t)$

点PがOに到達するとき　$2t-8=0$

よって　$t={}^{ア}4$

(1)　$S=\triangle \mathrm{OPP'}+\triangle \mathrm{OQQ'}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\{0-(2t-8)\}\cdot(-2t+8)+\frac{1}{2}\cdot t\cdot 10t$$

$$={}^{イ}7t^2-{}^{ウエ}16t+{}^{オカ}32=7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{160}{7}$$

$0<\frac{8}{7}<4$ であるから，Sは$0<t<4$において，$t=\frac{{}^{キ}8}{{}^{ク}7}$ で最小値 $\frac{{}^{ケコサ}160}{{}^{シ}7}$ をとる。

以下，aは$0<a<3$を満たす定数である。

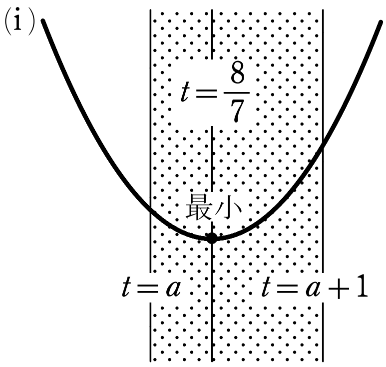
(i)　Sが$t=\frac{8}{7}$で最小となるのは，$a\leqq\frac{8}{7}\leqq a+1$を満たすときである。

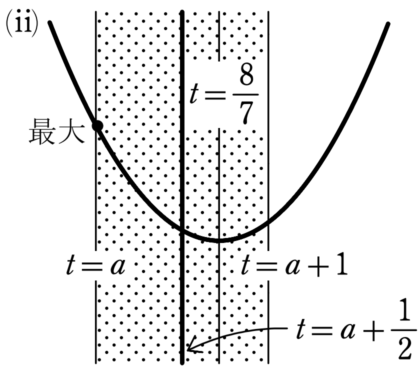
$\frac{8}{7}\leqq a+1$ より $\frac{1}{7}\leqq a$ であるから，求めるaの値の範囲は　$\frac{{}^{ス}1}{{}^{セ}7}\leqq a\leqq\frac{{}^{ソ}8}{{}^{タ}7}$

(ii)　Sが$t=a$で最大となるのは，tの範囲$a\leqq t\leqq a+1$の中央の値$a+\frac{1}{2}$が，軸の値$\frac{8}{7}$以下になるときである。

すなわち　$a+\frac{1}{2}\leqq\frac{8}{7}$　　よって　$a\leqq\frac{9}{14}$

これと，$0<a<3$の共通範囲から，求めるaの値の範囲は　$0<a\leqq\frac{{}^{チ}9}{{}^{ツテ}14}$





(2)　3点O，P，Qを通る2次関数のグラフが関数$y=2x^2$のグラフを平行移動したものになるとき，原点Oを通ることからその関数の式は

$$y=2x^2+px\ (p\text{は実数})$$

と表される。

さらに，グラフが P$(2t-8,\ -2t+8)$，Q$(t,\ 10t)$ を通るから

$$-2t+8=2(2t-8)^2+p(2t-8),\qquad 10t=2t^2+pt$$

$0<t<4$ より $2t-8\neq 0$，$t\neq 0$ であるから，方程式の両辺をそれぞれ $2t-8$，t で割ると

$$-1=2(2t-8)+p,\qquad 10=2t+p$$

すなわち　$4t+p=15,\qquad 2t+p=10$

これを解いて　$t=\dfrac{{}^{\text{ト}}5}{{}^{\text{ナ}}2}$，$p=5$

$y=2x^2+5x=2\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}$ であるから，$y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{{}^{\text{ニヌ}}-5}{{}^{\text{ネ}}4}$，

y 軸方向に $\dfrac{{}^{\text{ノハヒ}}-25}{{}^{\text{フ}}8}$ だけ平行移動すればよい。